Das Romer-Modell mit qualitätsverbesserndem technischen Fortschritt*

Regensburger Diskussionsbeiträge zur Wirtschaftswissenschaft, Nr. 412

Wolfgang Kornprobst†

21. Juni 2006

Zusammenfassung

In bedeutenden Modellen der neuen Wachstumstheorie wird Wachstum entweder durch eine zunehmende Produktvielfalt oder durch Qualitätsverbesserungen bestehender Produkte modelliert. Wachstum im Romer-Modell (Romer (1990)) basiert auf einer zunehmenden Anzahl von Produkten, bei Grossman und Helpman wird Wachstum durch eine zunehmende Qualität bestehender Produkte generiert[1] (Grossman & Helpman 1991a, Kap. 4). Beide Modelle haben Vorzüge. Das Romer-Modell erklärt die Entwicklung des aggregierten Kapitalstocks besser. Das Qualitätenmodell von Grossman und Helpman wird der Sicht Schumpeters eher gerecht, dass Wachstum durch kreative Zerstörung entsteht. Indem junge Firmen bestehende Produkte verbessern, verdrängen sie die alten Firmen mit den schlechteren Produkten. Die Ökonomie profitiert, weil ständig bessere Produkte verfügbar werden. Außerdem wird bei Grossman/Helpman der Forschungsprozess treffender modelliert: Es liegt Unsicherheit über den Erfolg von Forschung vor. Im Romer-Modell gibt es diese Unsicherheit nicht. Das vorliegende Modell verbindet die Vorteile beider Modelle. Es behält die Struktur des Romer-Modells, implementiert aber Schumpeters Sicht über wirtschaftlichen Fortschritt.

JEL classification: O30, O40

---

*Für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele Ratschläge bin ich Lutz Arnold äußerst dankbar.

†Wolfgang Kornprobst, Lehrstuhl für Theoretische Volkswirtschaftslehre, Universität Regensburg, Tel.:+49 941 943 2704, E-Mail: wolfgang.kornprobst@wiwi.uni-regensburg.de

[1] Von Grossman und Helpman gibt es ein ebenso bekanntes Varietätenmodell (Grossman & Helpman 1991a, Kap. 3). Es ist aber dem Romer-Modell sehr ähnlich. Allerdings ist die Struktur einfacher, und es passt nicht gut zu den empirischen Fakten. Deshalb wird es hier nicht weiter behandelt.

1 Einleitung

Menschen in den industrialisierten Ländern haben heute einen viel höheren Lebensstandard als ihre Vorfahren. Ein Grund ist, dass sie eine viel größere Auswahl an Produkten haben. Ganze Sparten, die heute einen sehr großen Teil der Konsumausgaben ausmachen (z.B. die Elektronik- und IT-Sparte), gab es vor wenigen Jahrzehnten noch nicht. Ein anderer, ebenso wichtiger Grund, ist, dass die Produkte qualitativ immer besser werden. Eine Untersuchung von Bils & Klenow (2001) ergab, dass zwischen 1980 und 1996 die durchschnittliche Wachstumsrate der Qualität von 66 langlebigen Konsumgütern 3,7% p.a. betrug. Auch andere Studien finden einen signifikanten Anteil am Wachstum des Sozialproduktes, der auf Qualitätsverbesserungen zurückzuführen ist. Beispielsweise ergab der Boskin-Report,[2] dass die gewöhnlich gemessene Inflationsrate die tatsächliche um 0,6 Prozent jährlich überzeichnete, weil Qualitätsverbesserungen nicht genügend berücksichtigt wurden, obwohl dies ausdrücklich versucht wurde. Eine geringere tatsächliche Inflationsrate heißt im Umkehrschluss ein höheres reales Wachstum der Ökonomie.[3] Qualitätsverbesserungen sind also eine sehr wichtige Wachstumsquelle.

In Romers bahnbrechendem Artikel „Endogenous Technological Change“ (Romer 1990) resultiert Wachstum aber allein dadurch, dass ständig neue Produkte (Kapitalgüter) erfunden werden und diese mit allen alten Zwischenprodukten in der Produktion eines homogenen Endproduktes eingesetzt werden.[4] Obwohl jeder einzelne Produktionsfaktor abnehmende Grenzerträge aufweist, ist anhaltendes endogenes Wachstum möglich, weil ständig neue Kapitalgüter in der Produktion eingesetzt werden. Dem Kritikpunkt, dass in diesem Modell keine Qualitätsverbesserungen existieren, kann noch entgegnet werden, dass die neuen Produkte einfach als bessere alte Produkte interpretiert werden. Allerdings ist der Einwand, dass auch alle alten Zwischenprodukte Verwendung in der Endproduktherstel-

[2]Siehe Boskin, Dulberger, Gordon, Griliches & Jorgenson (1996), Zahlen hier aus Bils & Klenow (2001). Einen kurzen Überblick über die Problematik der Inflationsmessung bei Qualitätsverbesserungen gibt Nordhaus (1998).

[3]Fehler in der Messung der Inflationsrate werfen vielfältige Probleme auf. Beispielsweise kann es zu einer suboptimalen Geldpolitik kommen, wenn die Zentralbank ihre Strategie stark an der Inflationsrate ausrichtet.

[4]Das Modell von Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 3) ist diesem sehr ähnlich. Darin werden die neuen Produkte nicht als Zwischenprodukte in der Herstellung eines Konsumgutes gesehen. Sie werden unmittelbar konsumiert, wobei eine größere Vielfalt der Produkte einen höheren Nutzen stiftet.

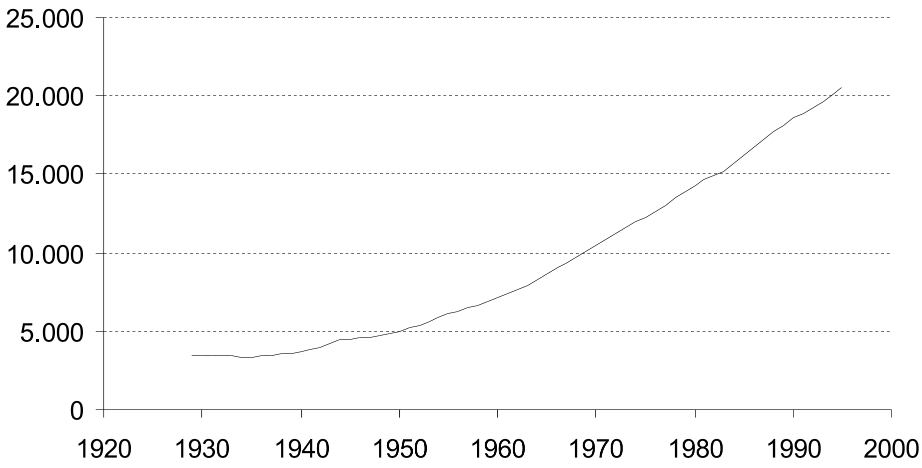

Abbildung 1: Entwicklung des Kapitalstocks in den U.S.A. zwischen 1929 und 1995 (aus Katz & Herman (1997)). Angaben in Milliarden USD.

lung finden, nicht zu entkräften. Das würde heißen, dass beispielsweise in der Textilindustrie neben neuen, computergesteuerten Hochleistungsmaschinen noch die ersten elektrischen Siemens-Webstühle aus dem 19. Jahrhundert eingesetzt werden!

Das Romer-Modell beschreibt also Wachstum durch eine zunehmende Vielfalt an Kapitalgütern. Die zweite wichtige Quelle von Wachstum – Qualitätsverbesserungen bestehender Produkte – wird durch das Romer-Modell nicht adäquat behandelt. Andere Modelle behandeln zwar Wachstum durch Qualitätsverbesserungen explizit,[5] aber sie treffen eine andere Tatsache im Wachstumsprozess nicht, nämlich Wachstum des Kapitalstocks. Beispielsweise hat sich in den USA der reale Kapitalstock zwischen 1929 und 1995 versechsfacht (siehe Abbildung 1).[6] Um die Modelle so einfach wie möglich zu machen, wird nämlich einfach angenommen, dass es kein Kapital gibt.

Die vorliegende Arbeit verbindet die Vorteile beider Modelle: Zum einen wird Wachstum durch Qualitätsverbesserungen generiert, wobei ältere, minderwertige

[5] Siehe Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 4), Grossman & Helpman (1991b) oder Aghion & Howitt (1992).

[6] Die Zahlen sind allerdings nur eine Approximation für den tatsächlichen Kapitalstock, der nur äußerst schwer zu quantifizieren ist. Sie geben die reale Entwicklung des materiellen, reproduzierbaren Sachvermögens in verketteten Dollar mit Basisjahr 1992 an.

Produkte überflüssig werden. Zum anderen ist Kapital ein notwendiger Faktor in der Produktion.
Es wird wie folgt vorgegangen. Kapitel 2 beschreibt das Modell mit sämtlichen Annahmen. In Kapitel 3 wird die gleichgewichtige Wachstumsrate einer Marktwirtschaft berechnet. Kapitel 4 analysiert die Wohlfahrtseigenschaften. Das letzte Kapitel fasst dann die Ergebnisse kurz zusammen.

2 Beschreibung des Modells

Die Ökonomie besteht aus zwei Sektoren: einem kompetitiven Endproduktsektor und einem Zwischenproduktsektor, in dem die Kapitalgüter für den Endproduktsektor hergestellt werden. Außerdem wird in diesem an Qualitätsverbesserungen für die Kapitalgüter geforscht. Der Zwischenproduktsektor besteht aus einem Kontinuum an unterschiedlichen Produktlinien, welches zur Vereinfachung die Masse eins hat. Endprodukte werden mit Arbeit und Kapitalgütern über folgende Produktionsfunktion hergestellt:[7]

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \left(\exp \left\{ \int_0^1 \ln \left[\sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^{\omega} x_{\omega}(j) \right] dj \right\} \right)^{\alpha}, \tag{1}$$

wobei $0 < \alpha < 1$. Der Ausdruck in den runden Klammern kann als Kapital-Qualitäts-Index D_Y definiert werden:[8]

$$D_Y = \exp \left\{ \int_0^1 \ln \left[\sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^{\omega} x_{\omega}(j) \right] dj \right\}.$$

$\lambda^{\omega} x_{\omega}(j)$ ist die qualitätsangepasste Einsatzmenge eines Kapitalgutes j. $\omega = 1$ ist die niedrigste Qualitätsstufe, $\Omega(j)$ die höchste in Produktlinie j.[9] Steigt die höchste Stufe $\Omega(j)$ einer Produktlinie j, oder steigen die eingesetzten Mengen

[7] Hier ist eine Vereinfachung zum originalen Romer-Modell (Romer (1990)). Dieses unterscheidet zwischen einfacher und qualifizierter Arbeit (Humankapital) im Endproduktsektor. Im Forschungssektor wird bei Romer Humankapital als Input verwendet, hier auch nur einfache Arbeit. Die Spezifikation im Romer-Modell ist sicherlich realitätsnäher, die vereinfachende Annahme hier hat aber keine wesentlichen Auswirkungen auf die Eigenschaften des steady-state Wachstums in der Ökonomie.

[8] Bei Grossman & Helpman (1991a, Kap.4) steht D_Y für den momentanen Nutzen eines Konsumenten, dem verschiedene Güter in unterschiedlichen Qualitäten zur Verfügung stehen.

[9] Es wird angenommen, dass zum Anfangszeitpunkt zumindest eine „Basistechnologie" ($\omega = 1$) in jedem Sektor vorhanden ist.

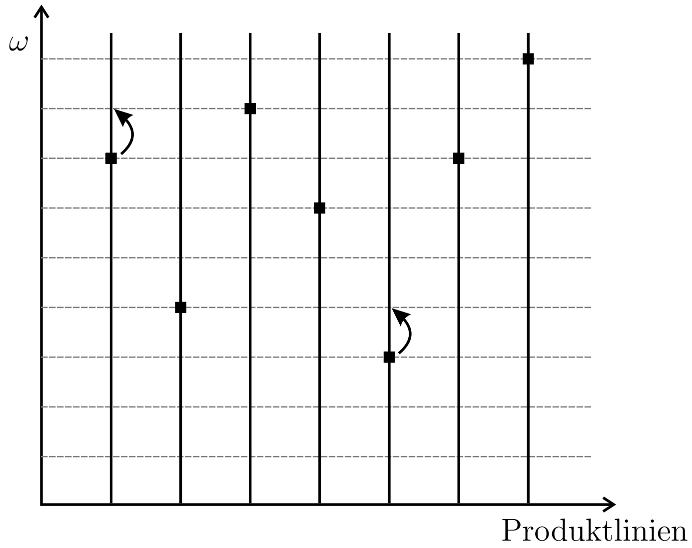

Abbildung 2: Erreichte Qualitätsstufen in den einzelnen Produktlinien (aus Grossman & Helpman (1991)).

eines Kapitalgutes, dann steigt der Index und mit ihm der Output des Endproduktes. Die Produktionsfunktion kann geschrieben werden als

$$Y = L_Y^{1-\alpha} D_Y^{\alpha}. \tag{2}$$

L_Y ist der Arbeitseinsatz im Endproduktsektor. Die Produktionsfunktion weist konstante Skalenerträge auf: ver–θ–facht man jeden Faktor, dann ver–θ–facht sich auch der Output.[10]

Im Zwischenproduktsektor werden Kapitalgüter mit Rohkapital (nicht konsumierter Output des Endproduktsektors) als einzigem Faktor produziert. Aus einer Einheit Rohkapital sollen – ohne weiteren Faktoreinsatz – $1/\eta(j)$ Einheiten an Kapitalgütern hergestellt werden können. Aus $K(j)$ Einheiten somit $K(j)/\eta(j) \equiv \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} x_\omega(j)$ Einheiten Kapitalgüter. Weiter unten wird gezeigt, dass immer nur eine Qualitätsstufe $\tilde{\omega}$ in jeder Produktlinie j produziert wird. Der Ausdruck vereinfacht sich dann zu $K(j)/\eta(j) = x_{\tilde{\omega}}(j)$. Die Produktionstechnologie sei für alle Produktlinien gleich, so dass $\eta(j) = \eta$ gilt, und folglich

$$x_{\tilde{\omega}}(j) = \frac{K(j)}{\eta}. \tag{3}$$

[10]Ein Beweis befindet sich im am Ende des Anhangs.

Für die Kapitalgüter wird zur Vereinfachung angenommen, dass sie keiner Abschreibung unterliegen. Sie haben also eine unendliche Lebensdauer. Außerdem seien sie problemlos wieder in Rohkapital zurück transformierbar, falls das Angebot die Nachfrage aus dem Endproduktsektor übersteigt.
In jeder Produktlinie gibt es verschiedene Qualitätsstufen des Kapitalgutes, wobei höhere Qualitätsstufen durch gezielte Forschung erreicht werden können. Abbildung 2 zeigt eine mögliche Verteilung von Qualitätsstufen für die Produktlinien der Ökonomie zu einem beliebigen Zeitpunkt. Die dunklen Quadrate geben die momentan höchste Stufe in einer Produktlinie an. Bei erfolgreicher Forschung erhöht sich die Qualität in einer Produktlinie um eine Stufe. Sie steigt um den Faktor λ an. λ muss größer als eins sein. Der Forschungsprozess hat aber nicht eine mechanistische Form wie die Produktion in den beiden anderen Sektoren (mehr Inputmengen liefern sicher mehr Output) oder in den Wachstumsmodellen, die eine zunehmende Produktvielfalt abbilden (mehr Beschäftigung im F&E-Sektor generiert sicher mehr neue Produkte).[11] Forschungserfolg ist hier unsicher. Es gilt: Mehr Faktoreinsatz in Forschung liefert eine höhere Wahrscheinlichkeit, dass eine neue Qualitätsstufe erreicht wird. Forscht eine Firma mit Intensität $I(j)$ in Produktlinie j, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Qualitätsverbesserung im kurzen Zeitintervall dt: $I(j)\,dt$.
Gelingt eine Verbesserung, dann steigt die Qualität in dieser Produktlinie um eine Stufe, $\Delta\Omega(j) = 1$. Andernfalls ist $\Delta\Omega(j) = 0$. Die gesamte Anzahl der Qualitätsverbesserungen beträgt somit $\int_0^1 \Delta\Omega(j)\,dj = \Delta \int_0^1 \Omega(j)\,dj$. Weil angenommen wird, dass das Zeitintervall, in dem eine Qualitätsverbesserung stattfindet, sehr kurz ist, wird gewährleistet, dass in einer beliebigen Produktlinie nur maximal eine Qualitätsverbesserung in diesem Intervall stattfindet. $\Delta \int_0^1 \Omega(j)\,dj$ wird dann zu $d\int_0^1 \Omega(j)\,dj$ und gibt die Anzahl der Produktlinien mit Qualitätsverbesserungen an. Schließlich wird noch angenommen, dass die Forschungsintensität in jeder Produktlinie gleich hoch ist, $I(j) = I$. Zusammengenommen folgt $d\int_0^1 \Omega(j)\,dj = \int_0^1 I(j)\,dt\,dj = \int_0^1 I\,dt\;dj = I\,dt$, bzw.

$$d\int_0^1 \Omega(j)\,dj = I\,dt. \tag{4}$$

Die Anzahl der Produktlinien mit einer Qualitätsverbesserung entspricht also der Wahrscheinlichkeit für eine Verbesserung in einer Produktlinie.

[11] Siehe z.B. Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 3) oder Romer (1990).

Arbeit wird als einziger Faktor eingesetzt. Die Forschungsintensität einer Firma beträgt $I = \frac{L_A}{a}$. a ist ein Produktivitätsparameter. Für eine bestimmte Wahrscheinlichkeit Idt benötigt eine Firma $\frac{L_A}{a}dt$ an Faktoreinsatz.
Wird eine neue Qualität eines Produktes entwickelt, dann erhält der Zwischenprodukthersteller ein lebenslanges Patent und hat dann das alleinige Recht, das Produkt in dieser Qualitätsstufe zu produzieren. Niedrigere Stufen der gleichen Produktlinie dürfen hingegen schon noch von den jeweiligen Patenthaltern produziert werden. Hersteller von Zwischenprodukten (Kapitalgütern) haben also Preissetzungsmacht, jene im Endproduktsektor hingegen nicht.
Für die Bevölkerung wird angenommen, dass sie aus einem Kontinuum von Masse 1 an Haushalten besteht. Jeder Haushalt habe konstant L Mitglieder. Die Bevölkerungsgröße bleibt also gleich. Jedes Haushaltsmitglied bietet (unelastisch) eine Einheit Arbeit an, die im Forschungs- oder im Endproduktsektor eingesetzt werden kann. Die Haushalte seien alle identisch und maximieren die intertemporale Nutzenfunktion $V_0 = \int_0^\infty e^{-\rho t} \cdot U(t)dt$, wobei $\rho > 0$ gilt.[12] Der momentane Nutzen aus Konsum $U(t)$ ergibt sich aus der Standard-CES-Nutzenfunktion $U(t) = \frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$, mit $\sigma > 0$.[13]

3 Gleichgewichtiges Wachstum

Das Modell wird folgendermaßen gelöst: Zunächst werden die Gewinne der Zwischenprodukthersteller berechnet. Zusammen mit der Gleichgewichtsbedingung für den Kapitalmarkt und der Bedingung für einen optimalen Konsumpfad wird eine erste Beziehung zwischen Forschungsintensität und Wachstum des Sozialproduktes hergeleitet. Eine zweite folgt aus der Produktionsfunktion. Beide zusammen legen die gleichgewichtige Forschungsintensität und Wachstumsrate fest. Allerdings wird die Analyse nur für steady states durchgeführt. Jegliche Fragen der Stabilität und der Anpassungsdynamik des Marktgleichgewichts werden ausgeblendet.[14]

Zwischenprodukthersteller. Im Zwischenproduktsektor werden Kapitalgüter aus „Rohkapital“ hergestellt und finden im Endproduktsektor als Input Ver-

[12] Es wird unterstellt, dass die Individuen ewig leben, oder, dass sie den Konsum ihrer Nachkommen genauso bewerten wie den eigenen.

[13] Die intertemporale Substitutionselastizität beträgt $1/\sigma$.

[14] In Arnold & Kornprobst (2006) wird gezeigt, dass das Marktgleichgewicht sattelpunktstabil ist. Außerdem kann es für bestimmte Parameterkonstellationen zu einem Bereich für σ kommen, in dem Indeterminiertheit oder Instabilität vorliegen.

wendung. Die Gewinne eines Produzenten j von Qualität ω – ohne die Forschungsausgaben – ergeben sich aus[15]

$$\pi_\omega(j) = p_\omega(j)x_\omega(j) - rK_\omega(j).$$

bzw. mit $K_\omega(j) = \eta\, x_\omega(j)$

$$\pi_\omega(j) = p_\omega(j)x_\omega(j) - r\eta x_\omega(j).$$

Für die Monopolisten sind nun der optimale Preis und die optimale Ausbringungsmenge zu bestimmen. Die Nachfrage nach Zwischenprodukten, die nicht gekauft, sondern vom Hersteller periodenweise gemietet werden,[16] ergibt sich aus dem Gewinnmaximierungsverhalten des Herstellers des Endproduktes.[17]
Die Gewinnfunktion lautet:

$$\pi^Y = p_Y Y - \int_0^1 \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} p_\omega(j)x_\omega(j)dj - wL_Y.$$

Wählt man das Endprodukt als Numeraire ($p_Y = 1$) und nimmt an, dass nur eine Qualitätsstufe $\tilde{\omega}$ einer Produktlinie mit dem besten, qualitätsbereinigten Preis in der Produktion des Endproduktes Verwendung findet,[18] dann wird die Gleichung zu $\pi^Y = Y - \int_0^1 p_{\tilde{\omega}}(j)x_{\tilde{\omega}}(j)dj - wL_Y$, bzw.

$$\pi^Y = L_Y^{1-\alpha}\left(\exp\left\{\int_0^1 \ln\left[\lambda^{\tilde{\omega}}x_{\tilde{\omega}}(j)\right]dj\right\}\right)^\alpha - \int_0^1 p_{\tilde{\omega}}(j)x_{\tilde{\omega}}(j)dj - wL_Y. \quad (5)$$

[15] Wenn es nicht zu Unklarheiten führt, werden die Zeitargumente zur Vereinfachung weggelassen.

[16] Damit wird das Preissetzungs-Problem des Monopolisten bei langlebigen Gütern (durable goods monopoly problem) umgangen. Bei langlebigen Gütern stellt der Kauf eines Gutes diese Periode und der Kauf nächste Periode ein enges Substitut dar. Ein früher Kauf schmälert die Nachfrage zum späteren Zeitpunkt. Die gesunkene Nachfrage später liefert aber einen niedrigeren Monopolpreis. Für einen frühen Käufer, der die Preissenkung erwartet, ist es unter Umständen vorteilhaft, seine Käufe aufzuschieben und von den niedrigeren Preisen zu profitieren. Dies ändert aber wieder die Nachfrage und den Monopolpreis zum frühen Zeitpunkt. Für den Monopolisten ergibt sich also ein schwieriges Problem intertemporaler Preisdiskriminierung. Dies soll hier vermieden werden, indem die Güter periodenweise vermietet werden. Tirole (1988, Kap. 1.1.3 und 1.5) gibt eine gute Einführung in das Thema.

[17] Weil konstante Skalenerträge in der Produktion des Endproduktes unterstellt werden, kann man die Entscheidungssituation auch analysieren, indem man eine einzige, preisnehmende Firma unterstellt. Dieser stehen dann sämtliche Inputs in diesem Sektor zur Verfügung.

[18] Dies wird später noch hergeleitet.

Gewinnmaximierung verlangt $\partial\pi^Y/\partial x_{\tilde{\omega}}(j) = \partial\pi^Y/\partial L_Y = 0$. Daraus erhält man als Nachfrage[19] nach Zwischenprodukt j

$$x_{\tilde{\omega}}(j) = \frac{\alpha Y}{p_{\tilde{\omega}}(j)}. \tag{6}$$

Die Nachfrage hat eine Preiselastizität von -1.[20] Ein Anbieter von Gut j in Qualitätsstufe $\tilde{\omega}$ möchte deshalb die Menge möglichst einschränken, weil der Preisanstieg den Umsatzrückgang durch die sinkende Menge genau ausgleicht. Die damit sinkenden Produktionskosten steigern den Gewinn. Allerdings sind die verschiedenen Qualitäten einer Produktlinie perfekte Substitute, wenn sie um die unterschiedliche Qualität bereinigt werden. Die Preissetzungsmacht des Anbieters von Stufe $\tilde{\omega}$ wird dadurch eingeschränkt. Ein Zwischenprodukt, das um eine Stufe höher steht als ein anderes der gleichen Produktlinie, bringt λ mal soviel an „Qualitätsdiensten". Also darf es auch λ mal soviel kosten. Der Qualitätsführer hat also die Möglichkeit, sich die ganze Marktnachfrage zu sichern, wenn er marginal unter diesem Aufschlag bleibt. Im Vergleich mit seinem direktesten Konkurrenten muss also $p_\Omega(j)$ marginal unter $\lambda p_{\Omega-1}(j)$ bleiben. Der niedrigste Preis, zu dem der Nachfolger ohne Verluste produzieren kann entspricht seinen Grenzkosten $r\eta$. Es folgt[21]

$$p_\Omega(j) = \lambda p_{\Omega-1}(j) = \lambda r\eta.$$

Diese Argumentation gilt natürlich auch für alle niedrigeren Qualitätsstufen. Dem Qualitätsführer ist es möglich, sämtliche Konkurrenten aus dem Markt zu preisen.[22] Mit (6) folgt[23] ein Gewinn i.H.v.

$$\pi = \alpha\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)Y, \tag{7}$$

der für alle Zwischenprodukthersteller gleich ist.[24] Der Gewinn steigt mit dem

[19] Herleitung siehe Anhang.

[20] Kapitalgüter aus verschiedenen Sektoren sind also keine perfekten Substitute, wie es bei „konventionellen" Produktionsfunktionen (z.B. im Solow-Modell $Y = (AL)^{1-\alpha}K^\alpha$) der Fall ist. Einige Anmerkungen zu der hier verwendeten Produktionsfunktion finden sich am Ende des Anhangs.

[21] Genauer müsste die linke Seite marginal kleiner sein. Zur Vereinfachung wird hier angenommen, dass die Produzenten im Endproduktsektor bei Indifferenz immer die höhere Qualität wählen.

[22] Es wird also Bertrand-Wettbewerb unterstellt.

[23] Eine kurze Herleitung ist im Anhang.

[24] Der Preis ist unabhängig von j, die Nachfrage ebenso.

gesamten Output in der Ökonomie ($\partial\pi/\partial Y > 0$), mit der Bedeutung der Zwischenprodukte in der Endproduktherstellung ($\partial\pi/\partial\alpha > 0$) und der Höhe der Qualitätsstufen ($\partial\pi/\partial\lambda > 0$), die ja den Aufschlag auf die Grenzkosten bestimmen.

Der Wert eines Unternehmens im Zwischenproduktsektor (und damit der Wert eines Patents (P_A)) entspricht der Summe der erwarteten, diskontierten, künftigen Gewinne aus (7). Hierbei ist zu beachten, dass diese Gewinne ja nur eine gewisse Zeit anfallen, weil ein aktueller Qualitätsführer von einem Konkurrenten überholt und aus dem Markt gedrängt werden kann. Die Barwertberechnung kann auf zwei Wegen erfolgen: 1. Die erwarteten Gewinne werden mit der sicheren Rendite r abgezinst. Sie fallen eine begrenzte Zeit an. Diese ist die erwartete Dauer der Monopolposition.[25] 2. Auf die sichere Rendite wird eine Risikoprämie aufgeschlagen, der Zeithorizont ist dafür unendlich.[26]

Vorher kann aber noch ausgeschlossen werden, dass ein aktueller Qualitätsführer Forschung betreibt und eventuell mehrere Patente in einer Produktlinie akkumuliert. Grund ist, dass der aktuelle Qualitätsführer immer geringere Forschungsanreize hat als ein Outsider.[27] Im Marktgleichgewicht betreiben dann nur die Outsider Forschung. Dies wird folgendermaßen ersichtlich: Bei einer Stufe Vorsprung beträgt der Gewinn eines Qualitätsführers $\pi = \alpha(1 - 1/\lambda)Y$. Der Barwert dieser Gewinne ist P_A. Bekäme er durch Forschung zwei Stufen Vorsprung, dann könnte er den Preis auf $\lambda^2 r\eta$ setzen und die Gewinne würden auf $\pi_2 = \alpha(1 - 1/\lambda^2)Y$ steigen. Bezeichne $P_{A,2}$ den Barwert dieser Gewinne. Wenn der Qualitätsführer sich entscheidet, eine kurze Zeitspanne dt Forschung zu betreiben und auch ein Outsider forscht, dann sind vier Zustände möglich, wobei er immer die Kosten für Forschung zu tragen hat: entweder nur er hat Erfolg, dann beträgt sein Firmenwert $P_{A,2}$; oder er hat keinen Erfolg, aber ein Outsider, dann entstehen ihm nur Kosten, sein Patent und damit seine Firma wird wertlos; oder keiner hat Erfolg, dann behält seine Firma weiterhin den Wert P_A; oder beide haben Erfolg, dann entsteht ein Duopol. Im Erwartungswert (und wenn zur Vereinfachung Doppelwahrscheinlichkeiten gestrichen werden) liefert Forschung dann einen Wert i.H.v. $P_{A,2}Idt + (1 - Idt - Idt)P_A - wL_A(j)dt$, wobei $wL_A(j)dt$ seine Kosten sind und

[25] Diesen Weg wählen Barro & Sala-i-Martin (2004, Kapitel 7).

[26] Grossman & Helpman (1991a, Kapitel 4) und Arnold (2005a) verfahren so.

[27] Allerdings argumentiert Cozzi (2004), dass ein Marktführer eigentlich indifferent ist, ob er forscht oder nicht. Etro (2004) zeigt, dass in einem System mit Stackelberg-Wettbewerb immer ein Marktführer die größten Forschungsanreize hat.

Idt die Wahrscheinlichkeit für erfolgreiche Forschungsanstrengung im Intervall dt darstellt, die für Qualitätsführer und Outsider annahmegemäß gleich ist. Für den Fall, dass kein Outsider forscht, ergibt sich für den Qualitätsführer ein erwarteter Wert i.H.v. $P_{A,2}Idt + (1 - Idt)P_A - wL_A(j)dt$.
Stellt man die gleichen Überlegungen auch für den Outsider an, dann ergibt sich Folgendes: betreibt ein Outsider Forschung, dann erhält er (im Erwartungswert) $P_AIdt - wL_A(j)dt$, unabhängig davon, ob der Qualitätsführer forscht oder nicht.[28] Forscht er nicht, dann ist sein Ertrag null, seine Kosten aber auch.
Für den Qualitätsführer ergibt sich eine dominante Strategie: er betreibt Forschung, falls $P_{A,2} - P_A > wL_A(j)/I$. Auch für einen Outsider ist eine Strategie dominant: Forschung, falls $P_A > wL_A(j)/I$.
Weil $\pi_2 - \pi < \pi$, ist auch $P_{A,2} - P_A < P_A$. Ein Qualitätsführer hat also immer weniger Anreize zu forschen. Im Gleichgewicht betreiben nur Outsider Forschung und machen Verbesserungen, und es kommt zu „leapfrogging“: Aktuelle Monopolisten werden ständig von Outsidern verdrängt, es kommt nicht zu dauerhaften Monopolpositionen. Der Preisaufschlag auf die Grenzkosten und die Gewinne bleiben damit konstant.

Interessanterweise macht es hier einen Unterschied, ob die Zwischenprodukthersteller selbst Forschung betreiben oder ob es einen eigenen Forschungssektor gibt, von dem sie sich die Patente kaufen. In den Varietätenmodellen ist dies egal. Romer (1990, S.82): *„Whether the owner of the patent manufactures the good itself or licenses others to do so, it can extract the same monopoly profit. Design of new durables and manufacturing could take place within the same firm, but it is easier to describe the equilibrium if the research and development department is treated as a separate firm and designs are transferred for an explicit price.“*
Ist nämlich eine Qualitätsverbesserung gelungen und wird das Patent zum Kauf angeboten, dann lautet die Entscheidungssituation für den Qualitätsführer: Kaufe das Patent und erhalte einen Wert i.H.v. $P_{A,2} - Z$, wobei Z die Kosten für das Patent sind, oder kaufe nicht und verliere den Markt. Wenn der Outsider das Patent kauft, erhält er einen Wert i.H.v. $P_A - Z$. Weil $P_{A,2} > P_A$, hat der Qualitätsführer immer eine höhere Zahlungsbereitschaft als ein Outsider. Patente werden immer von Qualitätsführern gekauft. Dass Forschung von den Zwischen-

[28] Der sehr unwahrscheinliche Fall, dass beide Erfolg haben und ein Duopol entsteht, wird also wieder vernachlässigt.

produktherstellern selbst betrieben wird, ist in Modellen, in denen Wachstum durch Qualitätsverbesserungen entsteht, für ihre Handhabbarkeit sehr wichtig.[29]

Das Gewinnmaximierungsproblem eines Outsiders im Zeitintervall dt lautet:

$$\max_{L_A(j)} : \pi^A(j)dt = P_A(j) \underbrace{\frac{L_A(j)}{a}}_{=I} dt - wL_A(j)dt.$$

Daraus folgt die Bedingung erster Ordnung: $\partial\pi^A(j)/\partial L_A(j) = [P_A(j)/a]dt - wdt = 0$. Für eine positive, endliche Nachfrage nach Beschäftigung in Forschung muss gelten: $P_A(j) = wa$. Der Wert eines Patents entspricht den diskontierten künftigen Gewinnen aus (7) und ist unabhängig von der jeweiligen Produktlinie j gleich groß. Wäre der Preis eines Patents größer als wa, dann würde unbegrenzt Arbeit im Forschungssektor nachgefragt. Bei $P_A < wa$ wäre die Beschäftigung null. Es folgt

$$P_A \begin{cases} = wa & \text{für} \quad I > 0 \\ \leq wa & \text{für} \quad I = 0 \end{cases} .$$

Die Forschungsintensität in der Ökonomie beträgt $I = L_A/a$. Die Arbeitsnachfrage für Forschung also $L_A = aI$. Die Arbeitsnachfrage im Endproduktsektor erhält man aus der f.o.c. von Gleichung (5)[30]

$$L_Y = (1-\alpha)\frac{Y}{w}. \tag{8}$$

Gleichgewicht auf dem Arbeitsmarkt verlangt, dass sich das exogen vorgegebene Arbeitsangebot und die Arbeitsnachfrage entsprechen. Arbeit wird für Forschung und im Endproduktsektor nachgefragt, also:

$$L = aI + (1-\alpha)\frac{Y}{w}. \tag{9}$$

Für die Forschungsintensität ergibt sich nun Folgendes. Ist die Forschungsintensität gleich null, dann ist der Wert eines Patents kleiner oder gleich den Grenzkosten ($P_A \leq wa$). Das gesamte Arbeitsangebot wird im Endproduktsektor eingesetzt ($L = L_Y$), und aus (9) erhält man $w = (1-\alpha)Y/L$. Zusammen: $I = 0$ bedeutet $P_A \leq a(1-\alpha)Y/L$. Ist hingegen $I > 0$, dann sind P_A und wa gleich

[29] Vgl. Grossman & Helpman (1991a, Kap. 4), Grossman & Helpman (1991b, Kap. 4), Aghion & Howitt (1992) und Segerstrom (1998).

[30] Siehe Anhang.

groß. Die Beschäftigung im Endproduktsektor ist kleiner als das gesamte Arbeitsangebot ($L_Y < L$), und w muss größer als $(1-\alpha)Y/L$ sein. Gilt also $I > 0$, dann ist $P_A > a(1-\alpha)Y/L$.
Zusammen:

$$I = \begin{cases} \dfrac{L}{a} - \dfrac{(1-\alpha)Y}{P_A} & \text{für} \quad P_A > \dfrac{a(1-\alpha)Y}{L} \\ 0 & \text{für} \quad P_A \leq \dfrac{a(1-\alpha)Y}{L} \end{cases} . \tag{10}$$

Der Fall $I = 0$ wird im Folgenden allerdings nicht mehr analysiert. Sämtliche Arbeit würde im Endproduktsektor eingesetzt, neue Kapitalgüter würden nicht erfunden. Weil die alten fallenden Grenzerträgen unterliegen, wäre Nullwachstum die Folge.

Kapitalmarktgleichgewicht. Der Wert eines Patents entspricht den erwarteten, diskontierten, künftigen Gewinnen

$$P_A(t) = \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau [r(s)+I(s)]ds} \pi(\tau) d\tau. \tag{11}$$

Die Forschungsintensität ist gleichzeitig ein Aufschlag auf den sicheren Anlagezins.[31] Ableiten von P_A nach der Zeit liefert[32]

$$r(t)P_A(t) = \pi(t) + \dot{P}_A(t) - I(t)P_A(t). \tag{12}$$

Gleichung (12) kann so interpretiert werden: Die rechte Seite stellt die erwartete Rendite bei Forschung dar. Sie besteht aus einer Dividende ($\pi(t)$) und einem eventuellen Kapitalgewinn ($\dot{P}_A(t)$). Außerdem ist es ja noch möglich, dass ein Konkurrent erfolgreich forscht und den Markt für sich gewinnt. In diesem Fall wird das Patent und die Firma wertlos, die Wahrscheinlichkeit dafür entspricht der gesamten Forschungsintensität in dieser Produktlinie. Der erwartete Kapitalverlust aus dieser Möglichkeit ist somit $I(t)P_A(t)$. Die linke Seite ist die Rendite des Betrages P_A bei sicherer Anlage. Weil die Erfolgswahrscheinlichkeiten der einzelnen Produktlinien per Annahme unkorreliert sind und spezifische Risiken vollständig diversifizierbar sind, müssen im Kapitalmarktgleichgewicht die zwei Investitionsmöglichkeiten die gleiche Rendite liefern. Beide Seiten der Gleichung müssen gleich groß sein.
Mit der Arbitragegleichung für den Kapitalmarkt und der Gewinngleichung der

[31] Eine nähere Begründung findet sich im Anhang.
[32] Auch hierzu ist im Anhang eine kurze Herleitung.

Kapitalgüterproduzenten lässt sich nun P_A näher bestimmen. Gleichung (12) umformen, durch P_A teilen und (7) einsetzen liefert

$$\frac{\dot{P}_A}{P_A} = r + I - \alpha\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{Y}{P_A}. \tag{13}$$

Nimmt man eine positive Forschungsintensität an, dann folgt mit (10)[33]

$$\frac{\dot{P}_A}{P_A} = r + \frac{L}{a} - \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)\frac{Y}{P_A}. \tag{14}$$

Im steady state muss P_A mit konstanter Rate wachsen. Dies verlangt, dass Y und P_A mit der gleichen Rate wachsen, weil L als konstant angenommen wurde und auch der Zins im steady state konstant ist:

$$\hat{Y} = \hat{P}_A. \tag{15}$$

Haushalte. Die Haushalte maximieren die intertemporale Nutzenfunktion $V_0 = \int_0^\infty e^{-\rho t} \cdot \frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} dt$ gegen die Budgetbeschränkung $\dot{\nu} + Lc = r\nu + wL$. Die linke Seite stellt die Ausgaben für Konsum (Lc) und den Erwerb von Wertpapieren ($\dot{\nu}$) dar. Auf der rechten Seite stehen die Einkünfte aus Arbeit (wL) und Wertpapierbesitz ($r\nu$). Das gesamte Optimierungsproblem lautet

$$\begin{aligned} &\max_{c(t)} V_0 = \int_0^\infty e^{-\rho t} \cdot \frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} dt \\ \text{s.t.} \quad &\dot{\nu}(t) = r(t)\nu(t) + w(t)L - Lc(t) \\ &\nu(0) = \nu_0 \\ &\lim_{t\to\infty} \nu(t)\, e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau} \geq 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Die dritte Gleichung in (16) besagt, dass ein bestimmter Anfangsbestand an Wertpapieren vorhanden ist. Gleichung vier ist eine No-Ponzi-Game-Bedingung. Sie schließt aus, dass ein Konsument sich für immer verschuldet, indem er den Schuldendienst für alte Schulden durch Aufnahme immer neuer Schulden aufbringt. Aufstellen der Hamiltonfunktion in Gegenwartsschreibweise:

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} \cdot \frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + \mu(t)\left[\underbrace{w(t)L + r(t)\nu(t) - Lc(t)}_{\dot{\nu}(t)}\right].$$

[33] Siehe Anhang.

Daraus ergeben sich folgende notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Optimalität:[34]

$$c(t)^{-\sigma} \cdot e^{-\rho t} - \mu(t) = 0 \tag{17}$$

$$r(t)\mu(t) = -\dot{\mu} \tag{18}$$

Außerdem noch eine Transversalitätsbedingung, $\lim_{t\to\infty} \nu(t)\cdot\mu(t) = 0$. Bedingung (17) nach $\mu(t)$ auflösen, nach t ableiten, mit (18) gleichsetzen und umformen liefert die übliche Ramsey-Regel für den optimalen Konsumpfad:[35]

$$\hat{c} = \frac{r-\rho}{\sigma}. \tag{19}$$

Diese Wachstumsrate des Konsums entspricht der Wachstumsrate des Sozialproduktes Y. Dies wird folgendermaßen klar: Das Sozialprodukt wird aufgeteilt in Konsum und Sparen. Der Kapitalstock entspricht den Zwischenprodukten (Kapitalgütern) in der Ökonomie und unterliegt per Annahme keiner Abschreibung. Die Ersparnisse entsprechen somit den Bruttoinvestitionen. Es folgt $L\,c = Y - \dot{K}$. Teilen durch Y auf beiden Seiten ergibt $\frac{Lc}{Y} = 1 - \frac{\dot{K}}{K} \cdot \frac{K}{Y}$. Die Wachstumsrate des Kapitalstocks ist im steady state konstant. Dies wird folgendermaßen ersichtlich: Der Kapitalstock einer Produktlinie besteht aus den Kapitalgütern, $K(j) = \eta x_{\Omega(j)}(j)$. Der aggregierte Kapitalstock ist somit $K \equiv \int_0^1 K(j)dj = \eta \int_0^1 x_{\Omega(j)}(j)dj = \eta \int_0^1 \frac{\alpha Y}{\lambda \eta r} dj = \frac{\alpha Y}{\lambda r}$. Weil der Zins im steady state konstant ist, folgt, dass Y und K mit der gleichen, im steady state konstanten, Rate wachsen. Wenn also K/Y und L konstant sind, dann folgt, dass c/Y auch konstant sein muss. Das bedeutet, dass beide mit der gleichen Rate wachsen. Insgesamt folgt (zusammen mit (15)), dass im steady state Konsum, Output, Kapitalstock und der Wert der Patente mit gleicher, konstanter Rate wachsen:

$$\hat{c} = \hat{Y} = \hat{K} = \hat{P}_A \quad \text{für} \quad I > 0. \tag{20}$$

Die Transversalitätsbedingung hat für die folgende Analyse eine wichtige Implikation, die noch zu verdeutlichen ist. Wenn das Produkt $\nu(t) \cdot \mu(t)$ mit fortschreitender Zeit gegen null gehen soll, heißt das, dass die Wachstumsrate dieses Ausdrucks negativ sein muss. Das bedeutet, dass $\hat{\nu} + \hat{\mu} < 0$ gelten muss. Der Wertpapierbestand der Haushalte ν setzt sich zusammen aus den gehaltenen Anteilen

[34] Für eine genauere Darstellung siehe ARNOLD (1997, Kapitel 3 und insb. der Anhang).
[35] Siehe Anhang.

an den Zwischenproduktherstellern und den Ansprüchen auf den Kapitalstock. Beide wachsen im steady state mit der gleichen Rate $\hat{Y}$. Also wächst auch ν mit dieser Rate. Die Wachstumsrate von μ ergibt sich, indem man (17) nach der Zeit ableitet und anschließend durch μ teilt: $\hat{\mu} = -\sigma\hat{c} - \rho$. Verwendet man wieder (20), dann folgt

$$\rho > (1-\sigma)\hat{Y}. \tag{21}$$

Steady State Wachstum. Gleichungen (13) und (10) nach Y/P_A auflösen, gleichsetzen und den Zins eliminieren, indem (19) nach r aufgelöst und eingesetzt wird, liefert mit (20)

$$\frac{1}{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}(\hat{Y}\sigma + \rho + I - \hat{Y}) = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{L}{a} - I\right).$$

Durch Umformen erhält man[36]

$$I = \frac{\alpha(1-\frac{1}{\lambda})}{1-\frac{\alpha}{\lambda}} \cdot \frac{L}{a} - \frac{(1-\alpha)(\sigma-1)}{1-\frac{\alpha}{\lambda}} \cdot \hat{Y} - \frac{1-\alpha}{1-\frac{\alpha}{\lambda}} \cdot \rho \tag{22}$$

bzw.

$$\hat{Y} = \frac{1}{(\sigma-1)}\left[\frac{\alpha(1-\frac{1}{\lambda})}{1-\alpha} \cdot \frac{L}{a} - \rho - \frac{1-\frac{\alpha}{\lambda}}{1-\alpha} I\right]. \tag{23}$$

Eine zweite Gleichung in $\hat{Y}$ und I erhält man aus der Produktionsfunktion für das Endprodukt. Aus (2) erhält man direkt $\hat{Y} = (1-\alpha)\hat{L}_Y + \alpha\hat{D}_Y$. Weil die Bevölkerung nicht wächst und der Anteil der Arbeit, der im Endproduktsektor eingesetzt wird, konstant bleibt im steady state, folgt

$$\hat{Y} = \alpha\hat{D}_Y. \tag{24}$$

Wachstum in dieser Ökonomie entsteht allein dadurch, dass der aggregierte Kapital-Qualitäts-Index wächst. Diese Wachstumsrate beträgt[37]

$$\hat{D}_Y = I\ln\lambda + \hat{Y}. \tag{25}$$

Einsetzen in (24) und Umformen ergibt eine Gleichung für die Wachstumsrate des Sozialprodukts in Abhängigkeit von I:

[36] Siehe Anhang.
[37] Die Herleitung ist im Anhang.

$$\hat{Y} = \frac{\alpha}{1-\alpha} I \ln \lambda. \tag{26}$$

Gleichungen (23) und (26) legen die gleichgewichtige Forschungsintensität und die gleichgewichtige Wachstumsrate fest. Hierbei ist allerdings noch zu unterscheiden, welche Werte σ annimmt. Außerdem muss noch sichergestellt werden, dass auch die Transversalitätsbedingung (21) erfüllt ist.

Ist $\sigma > 1$, dann ist die Steigung von Gleichung (23) im $\hat{Y}$-I-Diagramm negativ. Gleichung (26) ist eine Ursprungsgerade mit positiver Steigung. Um eine positive Forschungsintensität mit Wachstum in der Ökonomie zu haben, muss also der Ordinatenabschnitt von (23) positiv sein (Abbildung (3)):

$$\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)}\frac{L}{a} - \rho > 0$$

$$\text{bzw.} \qquad \tilde{\rho} \equiv \frac{\rho\, a}{L} < \frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)}. \tag{27}$$

$\tilde{\rho}$ darf also nicht zu groß sein, damit ein steady state existiert! Das bedeutet, dass die Bevölkerungsgröße und die Produktivität im Forschungssektor nicht zu niedrig, und der Diskontfaktor künftigen Nutzens nicht zu hoch sein dürfen. Die Transversalitätsbedingung (21) ist für $\sigma > 1$ immer erfüllt.[38]

Wenn σ kleiner als eins ist, dann ist der Koeffizient $1/(\sigma - 1)$ in (23) negativ und die Steigung somit positiv. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, bei denen die Ökonomie mit positiver Forschungsintensität wächst:

1. Der Ordinatenabschnitt von (23) ist positiv. Dann muss die Steigung von (23) kleiner sein als die von (26), um einen Schnittpunkt beider Geraden zu erhalten (siehe Abbildung 4, linke Grafik). Ein positiver Ordinatenabschnitt bedeutet

$$\tilde{\rho} > \frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)}. \tag{28}$$

Für die Steigung muss gelten

$$\frac{1-\frac{\alpha}{\lambda}}{(1-\alpha)(1-\sigma)} < \frac{\alpha \ln \lambda}{1-\alpha}.$$

Nach σ auflösen ergibt:

[38] Ein Beweis findet sich im Anhang.

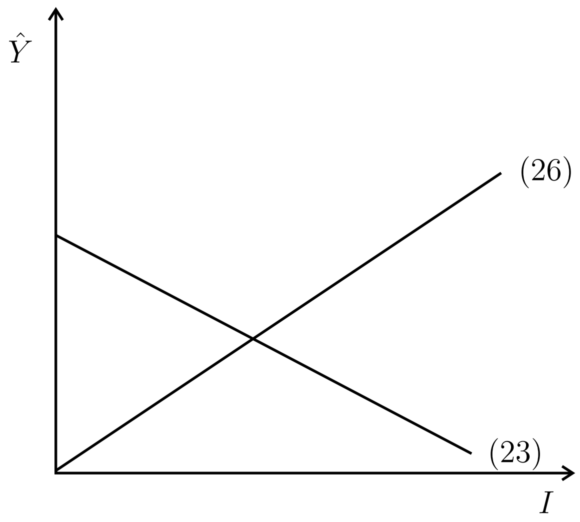

Abbildung 3: Steady state, wenn $\sigma > 1$.

$$\sigma < 1 - \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha \ln \lambda} \equiv \bar{\sigma}. \tag{29}$$

Trägt man $\tilde{\rho}$ gegen σ in einer Grafik an, dann lassen sich die nicht zulässigen Parameterbereiche aus (28) und (29) identifizieren. Wenn σ kleiner als $\bar{\sigma}$ ist, dann sind gemäß (28) nur Werte für $\tilde{\rho}$ zulässig, die größer sind als $\alpha\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) / (1-\alpha)$. Ansonsten würde kein steady state existieren. In Abbildung 5 ist also in dieser Konstellation nur der Bereich links von $\bar{\sigma}$ und oberhalb von $\alpha\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) / (1-\alpha)$ zulässig.

2. Der Ordinatenabschnitt von (23) ist negativ. Dann muss die Steigung von (23) größer sein als die von (26), um einen Schnittpunkt beider Geraden zu erhalten (siehe Abbildung 4, rechte Grafik). Ein negativer Ordinatenabschnitt bedeutet

$$\tilde{\rho} < \frac{\alpha\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)}. \tag{30}$$

Für die Steigungen ergibt sich nach etlichen Umformungen:

$$\sigma > 1 - \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha \ln \lambda} \equiv \bar{\sigma}. \tag{31}$$

Hier ist also nur der Bereich rechts von $\bar{\sigma}$ und unterhalb von $\alpha\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) / (1-\alpha)$ relevant für ein steady state.

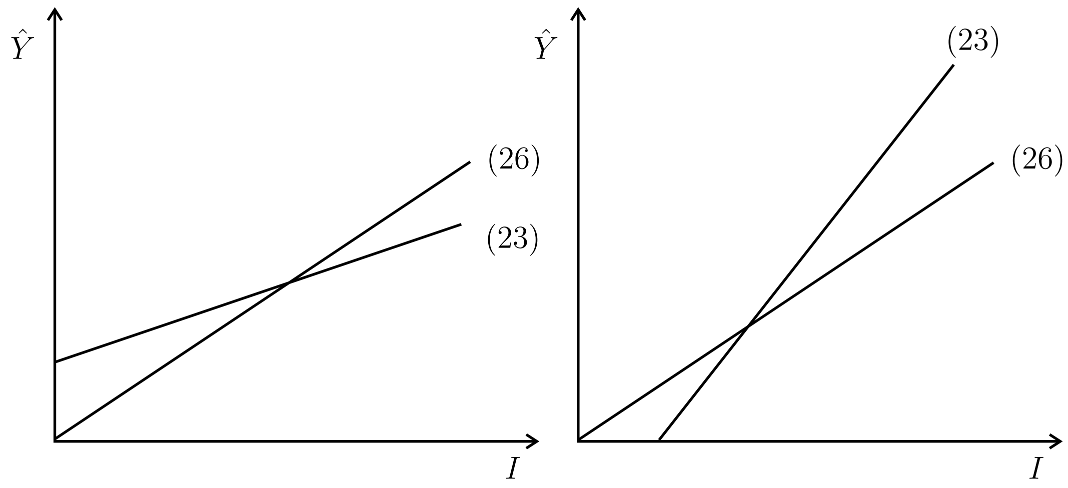

Abbildung 4: Steady states wenn $\sigma < 1$.

Angenommen, die Bedingungen (28) und (29) bzw. (30) und (31) seien erfüllt. Dann lässt sich aus den beiden Gleichungen (22) und (26) die gleichgewichtige Wachstumsrate des Sozialproduktes berechnen. Einsetzen von (22) in (26) liefert[39]

$$\hat{Y} = \frac{\alpha \ln \lambda}{\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1) \ln \lambda\right]} \left[\frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)} \cdot \frac{L}{a} - \rho \right]. \tag{32}$$

Es ist allerdings noch zu überprüfen, ob auch die Transversalitätsbedingung (21) erfüllt ist. Einsetzen von (32) in (21) ergibt nach einigen Umformungen[40] einen weiteren Zusammenhang in $\tilde{\rho}$ und σ:

$$\frac{\alpha^2 (1-\sigma) \ln \lambda \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)(1-\alpha)} \begin{cases} < & \tilde{\rho} \quad \text{für} \quad \sigma > \bar{\sigma} \\ > & \tilde{\rho} \quad \text{für} \quad \sigma < \bar{\sigma} \end{cases} \tag{33}$$

Die linke Seite von Bedingung (33) ist eine in σ linear (fallende) Funktion und wird bei $\sigma = 1$ null. In Abbildung 5 erfüllen im Intervall $(\bar{\sigma}; 1]$ nur Werte oberhalb dieser Geraden die Transversalitätsbedingung. Im Intervall $(0; \bar{\sigma})$ sind nur Werte unter der Geraden zulässig. Außerdem ist ihr Wert bei $\bar{\sigma}$ gleich $\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) / (1-\alpha)$. Alle drei Geraden haben also einen gemeinsamen Schnittpunkt bei $\left(\bar{\sigma}; \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) / (1-\alpha)\right)$. Die Werte oberhalb dieser Geraden für $0 < \sigma < \bar{\sigma}$ bzw. unterhalb davon für $\bar{\sigma} < \sigma \leq 1$ sind somit auch noch auszuschließen, so dass für $\sigma < 1$ nur die

[39] Herleitung siehe Anhang.
[40] Siehe Anhang.

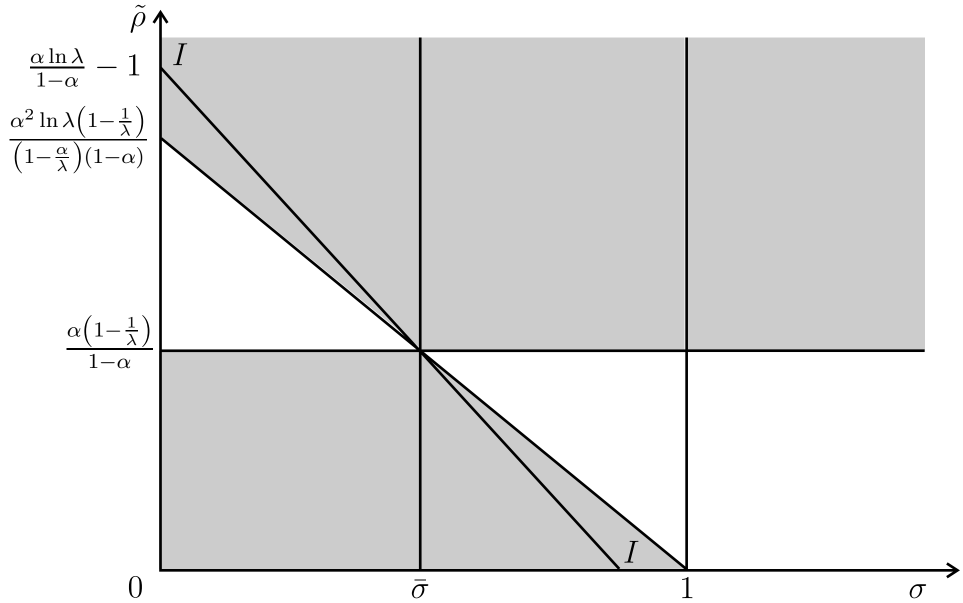

Abbildung 5: Zulässige Parameterbereiche.

weißen Bereiche in Abbildung 5 übrig bleiben. Für Parameterkonstellationen in diesen Bereichen ist sowohl die Transversalitätsbedingung als auch die Bedingung für die Existenz eines steady states erfüllt.

Eine letzte Restriktion wird durch die Höhe des Arbeitsangebots auferlegt. Für Forschung kann maximal die gesamte Bevölkerung eingesetzt werden, $I \leq \frac{L}{a}$. Für die gleichgewichtige Wachstumsrate folgt damit eine Obergrenze. In Abbildung 5 wird diese Bedingung durch die Gerade II mit Ordinatenabschnitt $\frac{\alpha \ln \lambda}{1-\alpha} - 1$ dargestellt.[41] Für $0 < \sigma < \bar{\sigma}$ sind nur Werte unterhalb, für $\bar{\sigma} < \sigma$ nur Werte oberhalb der Geraden zulässig. Die Transversalitätsbedingung ist damit stärker und impliziert die Restriktion durch die Bevölkerungsgröße.

Ist σ größer als eins, dann ist die Transversalitätsbedingung immer erfüllt. Es ist also nur die Restriktion aus (27) zu beachten. In Abbildung 5 ist deshalb für $\sigma > 1$ wieder nur der weiße Bereich zulässig.

Zur Vollständigkeit muss der Fall $\sigma = \bar{\sigma}$ noch ausgeschlossen werden. Dies würde nämlich bedeuten, dass die Geraden (23) und (26) parallel verlaufen. Eine eindeutige Lösung der beiden Gleichungen gibt es in diesem Fall nicht.

Gilt $\sigma = 1$, dann bestimmt sich die Forschungsintensität mit (22) alleine:

[41] Eine Herleitung der Geraden ist im Anhang.

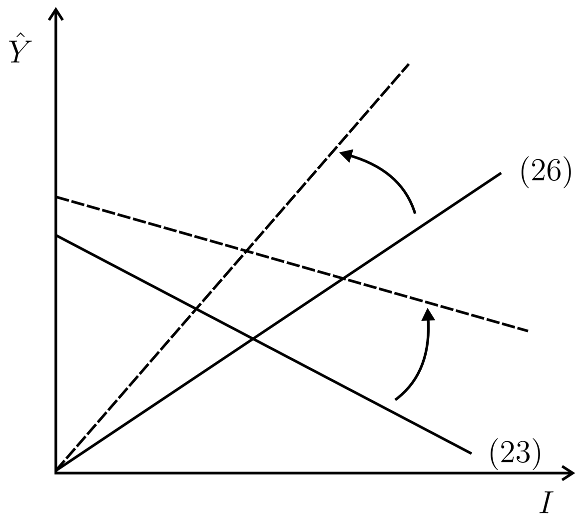

Abbildung 6: Komparative Statik, wenn λ steigt und $\sigma > 1$.

$$I = \frac{\alpha(1-\frac{1}{\lambda})}{1-\frac{\alpha}{\lambda}} \cdot \frac{L}{a} - \frac{1-\alpha}{1-\frac{\alpha}{\lambda}} \cdot \rho.$$

Im $\hat{Y}$–I–Diagramm wäre Gleichung (22) eine vertikale Gerade. Einsetzen in (26) ergibt die Wachstumsrate

$$\hat{Y} = \frac{\alpha \ln \lambda}{1-\frac{\alpha}{\lambda}} \left[\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)} \cdot \frac{L}{a} - \rho \right].$$

Komparative Statik. Zum Abschluss der Gleichgewichtsanalyse des Modells wird noch seine komparative Statik überprüft. Wenn $\sigma > 1$ ist, dann ist der Bruch vor Gleichung (32) eindeutig positiv. Damit sinkt die Wachstumsrate $\hat{Y}$ mit steigendem Diskontierungsfaktor ρ und steigendem σ und steigt mit der Größe der Bevölkerung L und mit der Forschungsproduktivität $1/a$. Außerdem steigt sie mit der Höhe der Qualitätsstufen λ. Dies wird folgendermaßen am einfachsten ersichtlich: Gleichung (26) wird mit zunehmendem λ steiler. In Gleichung (23) erhöht sich mit λ zum einen der Ordinatenabschnitt, zum anderen wird die Gerade flacher. Insgesamt verschiebt sich also die Gerade nach oben und dreht sich dabei gegen den Uhrzeigersinn. Mit einer steileren Geraden (26) heißt das, dass die Wachstumsrate zunehmen muss (siehe Abbildung 6).

Ist σ kleiner als eins, dann muss $[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma - 1)\ln\lambda] > 0$ sein, damit obige Eigenschaften erhalten bleiben. Dies bedeutet:

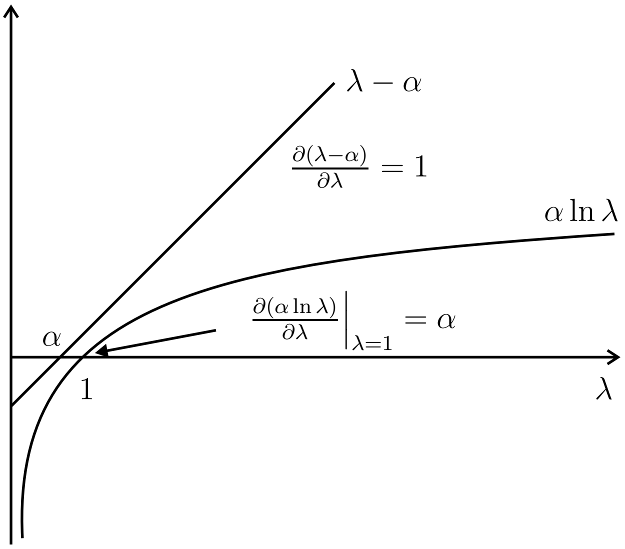

Abbildung 7: $\lambda - \alpha > \alpha \ln \lambda$ für $0 < \alpha < 1$.

$$\sigma > 1 - \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha \ln \lambda} \equiv \bar{\sigma}.$$

In Abbildung 5 hat der Bereich zwischen $\bar{\sigma}$ und 1 also auch eine „normale“ komparative Statik. In Abbildung 4 entspricht dieser Fall der rechten Grafik. Erhöht sich beispielsweise die Produktivität im Forschungssektor oder nimmt die Bevölkerungsgröße zu, dann verschiebt sich Gerade (23) nach unten und die Ökonomie wächst schneller. Gleiches gilt für eine Abnahme des Diskontierungsfaktors ρ. Weiter unten wird gezeigt, dass auch eine Erhöhung der Qualitätsstufen schnelleres Wachstum bewirkt.

Im umgekehrten Fall, wenn also σ kleiner als eins und kleiner als $\bar{\sigma}$ ist, ergibt sich eine „anormale“ komparative Statik. Dieser Fall entspricht dem linken Abschnitt in Abbildung 5 bzw. der linken Grafik in Abbildung 4. Ein größerer Term L/a bzw. ein kleineres ρ verschieben die Gerade wieder nach unten. Diesmal nimmt die Wachstumsrate aber ab! Auch höhere Qualitätsstufen mindern jetzt die Wachstumsrate. Dies wird folgendermaßen ersichtlich: Die gleichgewichtige Wachstumsrate von $\hat{Y}$ lässt sich darstellen als

$$\hat{Y} = \frac{1}{\sigma - \bar{\sigma}} \left[\frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)} \cdot \frac{L}{a} - \rho \right], \tag{34}$$

wobei $\bar{\sigma}$ von λ abhängig ist. Die partielle Ableitung von $\bar{\sigma}$ nach λ lautet

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\lambda} = -\frac{\alpha}{\lambda^2}\frac{\alpha\ln\lambda - (\lambda-\alpha)}{(\alpha\ln\lambda)^2} > 0.$$

Sie ist größer null, weil $\alpha\ln\lambda - (\lambda-\alpha)$ negativ ist, wenn $\lambda > 1$ und $0 < \alpha < 1$ (siehe Abbildung 7).
Die partielle Ableitung von $\hat{Y}$ nach λ ist

$$\frac{\partial\hat{Y}}{\partial\lambda} = \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{\lambda^2}\frac{L}{a}(\sigma-\bar{\sigma}) + \bar{\sigma}_\lambda\left[\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)}\cdot\frac{L}{a} - \rho\right]}{(\sigma-\bar{\sigma})^2},$$

wobei $\bar{\sigma}_\lambda = \partial\bar{\sigma}/\partial\lambda$. Nun ist es einfach zu sehen, wie eine Änderung der Qualitätsstufen-Höhe auf die gleichgewichtige Wachstumsrate $\hat{Y}$ wirkt. Gemäß (28) und (29) bzw. (30) und (31) haben $(\sigma-\bar{\sigma})$ und der Ausdruck in der eckigen Klammer immer das gleiche Vorzeichen. Weil der Nenner positiv ist, folgt

$$\frac{\partial\hat{Y}}{\partial\lambda}\begin{cases} < & 0 \quad \text{für} \quad \sigma < \bar{\sigma} \\ > & 0 \quad \text{für} \quad \sigma > \bar{\sigma} \end{cases}.$$

Größere Qualitätsstufen erhöhen $\hat{Y}$, wenn $\sigma > \bar{\sigma}$ ist, und mindern sie für $\sigma < \bar{\sigma}$. Eine höhere Forschungsproduktivität, ein größeres Arbeitskräftepotential, eine niedrigere Diskontrate und größere Qualitätsstufen mindern die Wachstumsrate, wenn $\sigma < \bar{\sigma}$.[42] Diese „verdrehte“ komparative Statik kommt interessanterweise weder im Romer-Modell, noch im GH-Modell vor. Im GH-Modell beträgt die Wachstumsrate (ohne die Annahme logarithmischen Nutzens): $\hat{Y} = \ln\lambda[(\lambda-1)L/a - \rho]/[(\sigma-1)\ln\lambda + \lambda]$. Die komparative Statik ist für positive σ immer „normal“, weil der Nenner positiv ist.

4 Wohlfahrt

Schließlich ist noch zu ermitteln, ob die durch das Marktgleichgewicht erreichte Ressourcenallokation nutzenmaximierend ist.
Dazu wird die Wachstumsrate berechnet, die resultieren würde, wenn ein wohlwollender sozialer Planer die Ressourcen der Ökonomie nach Belieben aufteilen könnte: das Endprodukt zwischen Konsum und Kapitalakkumulation und die verfügbare Arbeit zwischen dem Forschungs- und dem Endproduktsektor. Die

[42] In Arnold & Kornprobst (2006) wird gezeigt, dass in diesem Bereich die Modelldynamik entweder instabil oder indeterminiert sein kann. Stabile steady states mit dieser „anormalen“ komparativen Statik existieren deshalb.

Zielfunktion ist weiterhin Nutzenmaximierung. Die Kontrollvariablen des sozialen Planers sind der Konsum und die Forschungsintensität.
Die Produktionsfunktion aus (1) kann auch als

$$Y = (L - \underbrace{aI}_{=L_A})^{1-\alpha} \left(\frac{K}{\eta}\right)^{\alpha} \Bigg\{ \underbrace{\exp\left[\ln\lambda \int_0^1 \Omega(j)dj\right]}_{\equiv\Delta} \Bigg\}^{\alpha} = (L - aI)^{1-\alpha} \left(\frac{K}{\eta}\right)^{\alpha} \Delta^{\alpha} \tag{35}$$

geschrieben werden. Dies folgt aus zwei Beobachtungen: 1. L_Y kann durch $L - aI$ ersetzt werden. 2. Weil für die Herstellung der Kapitalgüter die gleiche Technologie gilt, wäre es nicht optimal, niedrigere Qualitätsstufen als die höchst-mögliche aus einer Produktlinie einzusetzen. Außerdem wird das verfügbare Kapital wegen fallender Grenzproduktivitäten zu jedem Zeitpunkt gleichmäßig auf alle Produktlinien verteilt, so dass $x(j) = x$ wie im Marktgleichgewicht gilt. Der Kapitalstock ergibt sich als $K = x\eta$. Somit folgt: $x = K/\eta$. Durch Einsetzen und geeignete Umformungen erhält man (35).[43]
Als erste Restriktion erhält man mithin

$$\dot{K} = Y - Lc = (L - aI)^{1-\alpha} \left(\frac{K}{\eta}\right)^{\alpha} \Delta^{\alpha} - Lc.$$

Indem man Δ nach der Zeit ableitet und (4) benutzt, erhält man eine zweite Restriktion:

$$\dot{\Delta} = \Delta I \ln\lambda.$$

Aufstellen der Hamiltonfunktion, bei der hier der „Haushalts-Nutzen“ und nicht der „Pro-Kopf-Nutzen“ maximiert wird, ergibt:

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} \frac{Lc(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \zeta_1(t) \left[(L - aI)^{1-\alpha} \left(\frac{K}{\eta}\right)^{\alpha} \Delta^{\alpha} - Lc(t)\right] + \zeta_2(t)\Delta I \ln\lambda.$$

Als notwendige Bedingungen ergeben sich:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial c} = e^{-\rho t} Lc^{-\sigma} - \zeta_1 L = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$e^{-\rho t} c^{-\sigma} = \zeta_1 \tag{36}$$

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial I} = \zeta_1(-a)(1-\alpha)(L - aI)^{-\alpha} \left(\frac{K}{\eta}\right)^{\alpha} \Delta^{\alpha} + \zeta_2\Delta\ln\lambda = 0 \quad \text{bzw.}$$

[43] Eine ausführlichere Herleitung befindet sich im Anhang.

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{(L - aI)\Delta \ln \lambda}{a(1-\alpha)Y} \tag{37}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = \zeta_1 (L - aI)^{1-\alpha} \frac{1}{\eta^\alpha}\, \alpha K^{\alpha-1} \Delta^\alpha = -\dot{\zeta}_1 \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1} = -\frac{\alpha Y}{K} \tag{38}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Delta} = \zeta_1 (L - aI)^{1-\alpha} \left(\frac{K}{\eta}\right)^\alpha \alpha \Delta^{\alpha-1} + \zeta_2 I \ln \lambda = -\dot{\zeta}_2 \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{\dot{\zeta}_2}{\zeta_2} = -\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \cdot \frac{\alpha Y}{\Delta} - I \ln \lambda\,. \tag{39}$$

Auf einem gleichgewichtigen Wachstumspfad muss ζ_2 definitionsgemäß mit konstanter Rate wachsen. Weil I und $\ln \lambda$ konstant sind, muss der mittlere Term in der letzten Gleichung auch konstant sein. Es folgt $\dot{\zeta}_1/\zeta_1 = \dot{\zeta}_2/\zeta_2 - \hat{Y} + \hat{\Delta}$. Aus (35) und (20) ergibt sich ein Zusammenhang zwischen Y und Δ:

$$\hat{\Delta} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{Y}. \tag{40}$$

Zusammen:

$$\frac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1} = \frac{\dot{\zeta}_2}{\zeta_2} - \frac{2\alpha - 1}{\alpha} \hat{Y}. \tag{41}$$

Leitet man Gleichung (36) nach der Zeit ab und teilt durch ζ_1, dann erhält man mit $\dot{c}/c = \dot{Y}/Y$ eine Gleichung in $\dot{\zeta}_1/\zeta_1$ und $\hat{Y}$:

$$\frac{\dot{\zeta}_1}{\zeta_1} = -\rho - \sigma \hat{Y}. \tag{42}$$

Gleichsetzen der letzten beiden Gleichungen, Auflösen nach $\dot{\zeta}_2/\zeta_2$ und Gleichsetzen mit (39) liefert

$$\frac{\dot{\zeta}_2}{\zeta_2} = \left(\frac{2\alpha - 1}{\alpha} - \sigma\right) \hat{Y} - \rho = -\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \cdot \frac{\alpha Y}{\Delta} - I \ln \lambda. \tag{43}$$

Setzt man (37) in die letzte Gleichung ein und eliminiert I durch (26) , dann erhält man schließlich nach geeigneten Umformungen[44] einen Ausdruck für die Wachstumsrate im Optimum[45]

[44] Siehe Anhang.

[45] Es wird unterstellt, dass gilt $\tilde{\rho} < \alpha \ln \lambda / (1 - \alpha)$. Für alle zulässigen Parameterbereiche für $\hat{Y}$ ist diese Bedingung erfüllt (siehe Abbildung 5). Wäre $\tilde{\rho} > \alpha \ln \lambda / (1 - \alpha)$, dann wäre es das Beste, keine Arbeit in Forschung einzusetzen. Die Wachstumsrate im Optimum wäre dann null.

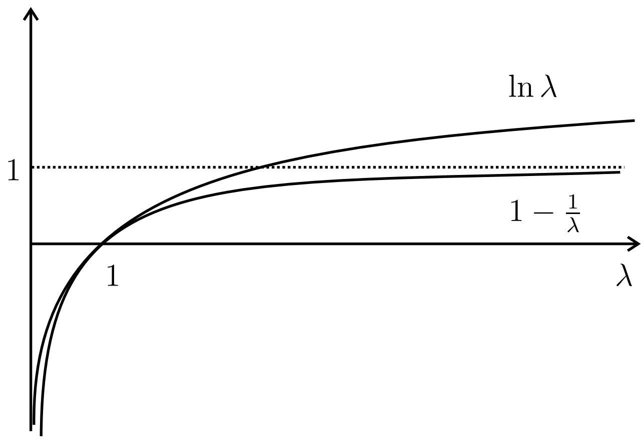

Abbildung 8: $\ln\lambda > 1 - 1/\lambda$ für $\lambda > 1$.

$$\hat{Y}^{*} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\alpha\ln\lambda}{1-\alpha}\cdot\frac{L}{a}-\rho\right). \tag{44}$$

Diese Wachstumsrate unterscheidet sich von der gleichgewichtigen Wachstumsrate des Marktsystems aus Gleichung (32). Die Gründe dafür liegen in den externen Effekten, die sich nicht in privaten Anreizen für Forschung niederschlagen. Weil genau diese Anreize die Wachstumsrate der dezentralisierten Marktwirtschaft bestimmen, muss diese nicht identisch sein mit der Wachstumsrate im Optimum.

Es gibt einen positiven Effekt für die Konsumenten, wenn die Kapitalgüter qualitativ besser werden, ohne dass sich der Preis erhöht („consumer-surplus effect“). Dadurch steigen ihre Konsummengen bei gleichen Ausgaben. Außerdem gibt es einen weiteren positiven Effekt durch Wissens-Spillover. Macht eine Firma eine Innovation, dann wird das darin enthaltene technische Wissen für alle anderen Firmen ersichtlich und Basis für ihre eigenen Forschungsanstrengungen („knowledge-spillover effect“). Beide Effekte wirken auf eine zu niedrige Wachstumsrate des Marktsystems hin. Allerdings geht von den Innovationen auch noch ein dritter, negativer, Effekt aus. Wenn einer Firma eine Innovation gelingt, dann eignet sie sich den ganzen Gewinnstrom aus dem Produkt an, auf Kosten des bisherigen Marktführers. Diese Gewinnverlagerung ist mit keinen gesellschaftlichen Wohlfahrtsgewinnen verbunden und stellt einen übermäßigen Anreiz für Innovationen dar („business-stealing effect“).

Es überwiegen aber die beiden erstgenannten Effekte den dritten. Die gleichgewichtige Wachstumsrate ist zu niedrig. Für $\bar{\sigma} < 0$ ist das wie folgt einfach zu sehen. $\hat{Y}^* > \hat{Y}$ kann durch Umformen und Einsetzen der Gleichungen (32) und (44) geschrieben werden als[46]

$$\frac{\alpha \ln \lambda}{1-\alpha} - \tilde{\rho} > \frac{\sigma}{\sigma - \bar{\sigma}} \left[\frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1-\alpha} - \tilde{\rho} \right]. \tag{45}$$

Abbildung 8 verdeutlicht, dass $\ln \lambda > 1 - 1/\lambda$ für $\lambda > 1$. Damit folgt $\alpha \ln \lambda/(1 - \alpha) - \tilde{\rho} > \alpha \left(1 - 1/\lambda\right)/(1-\alpha) - \tilde{\rho}$. (45) wird also impliziert von:

$$\frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1-\alpha} - \tilde{\rho} > \frac{\sigma}{\sigma - \bar{\sigma}} \left[\frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1-\alpha} - \tilde{\rho} \right].$$

Weil der Ausdruck in eckigen Klammern wegen (30) positiv ist, ist diese Bedingung äquivalent zu $\bar{\sigma} < 0$. Dies ist eben hier erfüllt. Ungleichungen (45) und $\hat{Y}^* > \hat{Y}$ sind richtig. Die gleichgewichtige Wachstumsrate ist für $\bar{\sigma} < 0$ also immer zu niedrig.

Für den Fall $\bar{\sigma} > 0$ ist $\hat{Y}$ eine unstetige Funktion in σ bei $\sigma = \bar{\sigma}$. Es sind somit zwei Bereiche für σ zu unterscheiden, in denen die Wachstumsraten verglichen werden müssen. Dazu wird als Erstes der Verlauf von $\hat{Y}$ und $\hat{Y}^*$ als Funktion von σ untersucht. Danach wird gezeigt, dass Bereiche, in denen $\hat{Y} > \hat{Y}^*$ wäre, immer ausgeschlossen werden können, weil sie in den unzulässigen Parameterbereichen liegen.

Im Bereich $0 < \sigma < \bar{\sigma}$ ist (32) eine monoton steigende und (44) eine monoton fallende Funktion in σ. Wenn σ gegen null geht, gilt für $\hat{Y}^*$ offensichtlich: $\lim_{\sigma \to 0^+} \hat{Y}^* = \infty$. $\hat{Y}$ nimmt einen endlichen Wert an:

$$\lim_{\sigma \to 0^+} \hat{Y} = \frac{\alpha \ln \lambda}{\left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda\right]} \left[\frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)} \frac{L}{a} - \rho \right].$$

Für $\sigma \to 0$ wäre also die Wachstumsrate im Optimum größer als die gleichgewichtige Wachstumsrate.

$\hat{Y}^*$ an der Stelle $\sigma = \bar{\sigma}$ nimmt einen endlichen Wert an:

$$\hat{Y}^* = \frac{\alpha \ln \lambda}{\alpha \ln \lambda - 1 + \frac{\alpha}{\lambda}} \left(\frac{\alpha \ln \lambda}{1-\alpha} \frac{L}{a} - \rho \right).$$

Dagegen geht $\hat{Y}$ für $\sigma \to \bar{\sigma}$ gegen Unendlich. Das wird folgendermaßen ersichtlich: Gemäß (34) lautet $\hat{Y}$:

[46] Herleitung siehe Anhang.

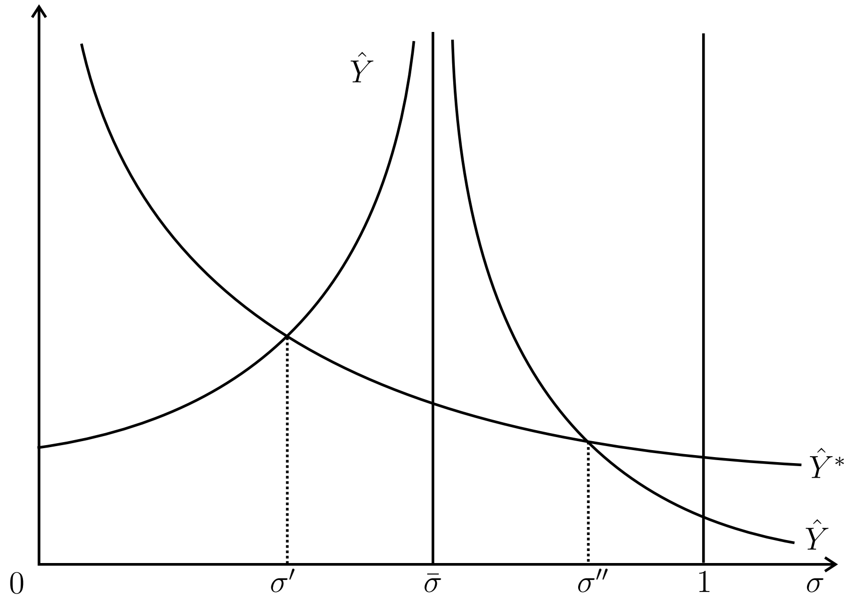

Abbildung 9: Wachstumsraten.

$$\hat{Y} = \frac{1}{\sigma - \bar{\sigma}} \left[\frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \alpha} \frac{L}{a} - \rho \right].$$

Ist $\sigma < \bar{\sigma}$, dann ist wegen (28) der Ausdruck in eckigen Klammern negativ. Geht σ von unten gegen $\bar{\sigma}$, dann strebt $\hat{Y}$ gegen Unendlich. Für $\sigma > \bar{\sigma}$ muss gemäß (30) der Klammerausdruck positiv sein, so dass auch hier $\hat{Y}$ gegen Unendlich geht, wenn σ sich von oben $\bar{\sigma}$ annähert. Abbildung 9 zeigt die Abschnitte von $\hat{Y}(\sigma)$ mit positiven Funktionswerten. Für den linken Ast gilt Bedingung (28), für den rechten Bedingung (30).

Im Bereich $\sigma > \bar{\sigma}$ fallen beide Funktionen in σ. $\hat{Y}$ fällt aber stärker, so dass sich beide Funktionen im Bereich $\bar{\sigma} < \sigma < 1$ schneiden. Für $\sigma \to \bar{\sigma}$ (von oben) ist, wie gezeigt, $\hat{Y} > \hat{Y}^*$. Bei $\sigma = 1$ gilt aber schon das Umgekehrte, $\hat{Y} < \hat{Y}^*$: (45) mit $\sigma = 1$ ergibt

$$\frac{\alpha \ln \lambda}{1 - \alpha} - \tilde{\rho} > \frac{1}{1 - \bar{\sigma}} \left[\frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \alpha} - \tilde{\rho} \right].$$

Umformen liefert die äquivalente Bedingung[47]

[47]Siehe Anhang.

$$\frac{1}{1-\bar{\sigma}} > \tilde{\rho}\,\frac{-\bar{\sigma}}{1-\bar{\sigma}}, \tag{46}$$

welche erfüllt ist, weil hier $\bar{\sigma} > 0$, und $\bar{\sigma} < 1$ immer gilt.[48]
Wenn $0 < \sigma < \bar{\sigma}$ und $\alpha(1-1/\lambda)/(1-\alpha) < \tilde{\rho}$ gilt, dann gibt es genau einen Schnittpunkt σ' von $\hat{Y}^*(\sigma)$ und $\hat{Y}(\sigma)$. Für $\bar{\sigma} < \sigma < 1$ und $\alpha(1-/\lambda)/(1-\alpha) > \tilde{\rho}$ gibt es auch genau einen Schnittpunkt der Funktionen, der mit σ'' abgekürzt wird (siehe Abbildung 9). Dass es jeweils genau einen Schnittpunkt gibt, folgt aus den Krümmungen der Funktionen. Für $\sigma > 0$ und $(\alpha \ln\lambda)/(1-\alpha) > \tilde{\rho}$ folgt:[49]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{Y}^*}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\alpha\ln\lambda}{1-\alpha}\frac{L}{a} - \rho\right) < 0 \quad \text{für} \quad \sigma > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha\ln\lambda}{1-\alpha} > \tilde{\rho} \\
\frac{\partial^2 \hat{Y}^*}{\partial \sigma^2} &= \frac{2}{\sigma^3}\left(\frac{\alpha\ln\lambda}{1-\alpha}\frac{L}{a} - \rho\right) > 0 \quad \text{für} \quad \sigma > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha\ln\lambda}{1-\alpha} > \tilde{\rho}.
\end{aligned}$$

$\hat{Y}^*$ ist eine streng konvex fallende Funktion in σ. Für $\hat{Y}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{Y}}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{(\sigma-\bar{\sigma})^2}\left[\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{1-\alpha}\frac{L}{a} - \rho\right] \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad (28), (29) \\ < 0 & \text{für} \quad (30), (31) \end{cases} \\
\frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial \sigma^2} &= \frac{2}{(\sigma-\bar{\sigma})^3}\left[\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{1-\alpha}\frac{L}{a} - \rho\right] \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad (28), (29) \\ > 0 & \text{für} \quad (30), (31) \end{cases} .
\end{aligned}$$

Im Bereich $0 < \sigma < \bar{\sigma}$ ist $\hat{Y}(\sigma)$ somit streng konvex steigend, für $\sigma > \bar{\sigma}$ streng konvex fallend. Zusammengenommen folgt, dass sich beide Funktionen $\hat{Y}^*(\sigma)$ und $\hat{Y}(\sigma)$ in den Bereichen $0 < \sigma < \bar{\sigma}$ und $\sigma > \bar{\sigma}$ jeweils genau einmal schneiden.
Der entsprechende Wert für σ' (wenn (28) gilt) bzw. σ'' (wenn (30) gilt) wird im Anhang berechnet und lautet:

$$\sigma_{|\hat{Y}=\hat{Y}^*} \quad = \quad \left(\tilde{\rho}\,\frac{1-\alpha}{\alpha\ln\lambda} - 1\right)\frac{1-\frac{\alpha}{\lambda}-\alpha\ln\lambda}{\alpha\left(\ln\lambda - 1 + \frac{1}{\lambda}\right)}$$

In diesem Schnittpunkt wird, gegeben die Parameter α und λ, dem σ ein eindeutiges $\tilde{\rho}$ zugeordnet. Rechts von σ' wäre die gleichgewichtige Wachstumsrate höher

[48]Weil $1-\alpha/\lambda > 0$ und $\alpha\ln\lambda > 0$ für $0 < \alpha < 1$ und $\lambda > 1$ muss gelten: $\bar{\sigma} = 1-(1-\alpha/\lambda)/(\alpha\ln\lambda) < 1$.
[49]Die letztgenannte Bedingung ist für alle zulässigen Parameterbereiche für $\hat{Y}$ erfüllt – siehe Abbildung 5.

als die im Optimum. Nun lässt sich aber zeigen, dass schon bei σ' die Transversalitätsbedingung (33) und die Bedingung für die Existenz eines steady states (28) nicht miteinander vereinbar sind. Bedingung (33) verlangt für σ':[50]

$$\tilde{\rho} < \frac{\alpha\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \alpha}.$$

Die Bedingung für Existenz eines steady states (28) verlangt aber genau das Gegenteil! Beide Bedingungen widersprechen sich. Parameterkonstellationen, in denen die gleichgewichtige Wachstumsrate und die im Optimum gleich wären, liegen außerhalb des zulässigen Bereichs. In der Abbildung für die zulässigen Bereiche impliziert ein Gleichsetzen von $\hat{Y}^*$ mit $\hat{Y}(> 0)$, dass die Existenzbedingung für einen steady state erfüllt ist. In Abbildung 10 ist man also für $\sigma < \bar{\sigma}$ oberhalb der horizontalen Geraden $\tilde{\rho} = (\alpha - 1/\lambda)/(1 - \alpha)$. σ' legt dann $\tilde{\rho}$ so fest, dass die Transversalitätsbedingung verletzt ist, wie oben gezeigt wurde. σ' würde damit in einem Punkt A oberhalb von $\tilde{\rho}(\sigma)$ liegen, und damit außerhalb des zulässigen Bereichs. Außerdem wird – wie man in Abbildung 10 leicht erkennen kann – die Transversalitätsbedingung mit steigendem σ noch strenger, so dass rechts von σ' eine der beiden Bedingungen mit Sicherheit immer verletzt ist. Also gilt auch im Bereich $0 < \sigma < \bar{\sigma}$, dass die Wachstumsrate im Optimum größer ist als die gleichgewichtige.

Für $\bar{\sigma} < \sigma < 1$ folgt ebenso, dass die Transversalitätsbedingung und die Bedingung für die Existenz eines steady states nicht gleichzeitig erfüllt sein können. Analog zu oben verlangt (33) für σ''

$$\tilde{\rho} > \frac{\alpha\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)}{1 - \alpha}.$$

Bedingung (30) verlangt aber wieder genau das Gegenteil. In Abbildung 10 bedeutet Existenz eines steady state bei Verletzen der Transversalitätsbedingung, dass σ'' einen Punkt unterhalb von $\tilde{\rho}(\sigma)$ festlegt, z.B. Punkt B. Mit fallenden σ wird die Transversalitätsbedingung noch strenger, so dass wiederum eine der beiden Bedingungen mit Sicherheit verletzt ist. Somit gilt: $\hat{Y}^* > \hat{Y}$ für $\bar{\sigma} < \sigma < 1$. Zusammengenommen folgt

$$\hat{Y}^* > \hat{Y} \qquad \text{für} \qquad \sigma > 0.$$

[50]Herleitung siehe Anhang.

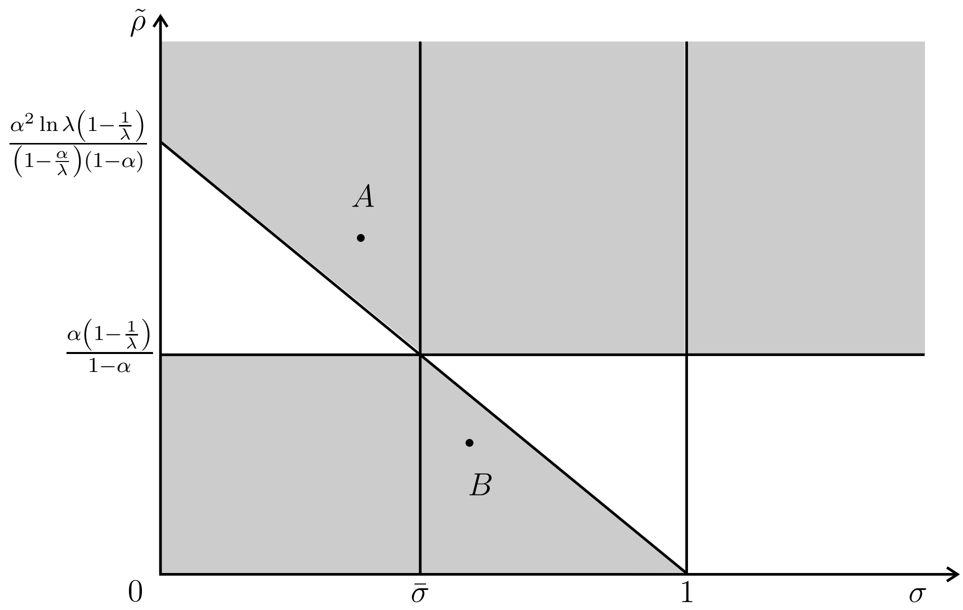

Abbildung 10: Parameterwerte für $\hat{Y}^* = \hat{Y}$.

Die gleichgewichtige Wachstumsrate ist immer zu niedrig, weil die positiven externen Effekte den negativen überwiegen.

5 Schluss

Das hier vorgestellte Modell verbindet die Vorzüge aus zwei anderen Modellen. Zum einen wird wie bei Grossman & Helpman (1991a) Wachstum durch Qualitätsverbesserungen modelliert. Neue, qualitativ bessere Produkte ersetzen alte, es kommt zu „kreativer Zerstörung“ im Schumpeterschen Sinne. Zum anderen wird trotzdem die Struktur des Romer-Modells nicht aufgegeben. Das Modell lässt sich in eine Form bringen, die dem Romer-Modell und damit dem neoklassischen Solow-Modell sehr ähnlich ist. In diesen wächst das Sozialprodukt langfristig mit der Rate des technischen Wissens. Hier wächst es proportional zur Wachstumsrate des Qualitätsindex,[51] was natürlich auch zunehmendes technisches Wissen widerspiegelt. Das Modell passt damit besser als das von Grossman und Helpman zu den empirischen Fakten, vermeidet aber gleichzeitig die Implikation des Romer-Modells, dass keine Produkte überflüssig werden.

[51] Siehe Gleichung (40).

Literatur

AGHION, P. & HOWITT, P. (1992), 'A model of growth through creative destruction', *Econometrica* **60**, S.323–351.

ARNOLD, L. G. (1997), *Wachstumstheorie*, Vahlen.

ARNOLD, L. G. (2005a), 'Multi-country endogenous growth models'. University of Regensburg Discussion Papers in Economics, No. 404.

ARNOLD, L. G. & KORNPROBST, W. (2006), 'Quality Upgrading in the Romer R&D Growth Model'. Mimeo, University of Regensburg.

BARRO, R. J. & SALA-I-MARTIN, X. (2004), *Economic Growth*, 2. edn, MIT Press.

BILS, M. & KLENOW, P. J. (2001), 'Quantifying quality growth', *American Economic Review* **91**, S.1006–1030.

BOSKIN, M., DULBERGER, E. R., GORDON, R. J., GRILICHES, Z. & JORGENSON, D. (1996), 'Toward a more accurate measure of the cost of living'. Final Report to the Senate Finance Committee, December 4.

COZZI, G. (2004), 'Arrow's effect under competitive R&D'. Mimeo, University of Rome, La Sapienza.

ETRO, F. (2004), 'Innovation by leaders', *The Economic Journal* **114**, S.281–303.

GROSSMAN, G. M. & HELPMAN, E. (1991a), *Innovation and Growth in the Global Economy*, MIT Press.

GROSSMAN, G. M. & HELPMAN, E. (1991b), 'Quality ladders in the theory of growth', *Review of Economic Studies* **58**, S.43–61.

KATZ, A. J. & HERMAN, S. W. (Mai 1997), 'Improved estimates of fixed reproducible tangible wealth', *Survey of Current Business* **77(5)**, S.69–92.

NORDHAUS, W. D. (1998), 'Quality change in price indexes', *Journal of Economic Perspectives* **12,1**, S.59–68.

ROMER, P. M. (1990), 'Endogenous technological change', *Journal of Political Economy* **98**, S.71–102.

SCHUMPETER, J. A. (1964), *Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung*, 6. edn, Duncker & Humblot. Unveränderter Nachdruck der 1934 erschienenen vierten Auflage.

SEGERSTROM, P. S. (1998), 'Endogenous growth without scale effects', *American Economic Review* **88**, S.1290–1310.

TIROLE, J. (1988), *The Theory of Industrial Organisation*, MIT Press.

Referee´s Appendix

Herleitung von Gleichung (6):

$$\max_{x_{\tilde{\omega}(j)}} \pi = L_Y^{1-\alpha}\left(\exp\left\{\int_0^1 \ln\left[\lambda^{\tilde{\omega}} x_{\tilde{\omega}}(j)\right] dj\right\}\right)^{\alpha} - \int_0^1 p_{\tilde{\omega}}(j) x_{\tilde{\omega}}(j) dj - wL_Y.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{x_{\tilde{\omega}(j)}} = L_Y^{1-\alpha}\alpha D_Y^{\alpha-1} \cdot D_Y \cdot \frac{1}{x_{\tilde{\omega}(j)}} - p_{\tilde{\omega}}(j) = 0 \\ p_{\tilde{\omega}}(j) x_{\tilde{\omega}(j)} = \alpha \underbrace{L_Y^{1-\alpha} D_Y^{\alpha}}_{=Y} \\ x_{\tilde{\omega}(j)} = \alpha \frac{Y}{p_{\tilde{\omega}}(j)}.\end{aligned}$$

Herleitung von Gleichung (7):

$$\pi_{\Omega(j)}(j) = p_{\Omega(j)}(j) x_{\Omega(j)}(j) - r\eta x_{\Omega(j)}(j) = \left[\underbrace{p_{\Omega(j)}(j)}_{=\lambda r\eta} - r\eta\right] \underbrace{x_{\Omega(j)}(j)}_{=\frac{\alpha Y}{\lambda r\eta}} = (\lambda r\eta - r\eta)\frac{\alpha Y}{\lambda r\eta}$$

$$\pi_{\Omega(j)}(j) = \pi = \alpha\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) Y.$$

Herleitung von Gleichung (8):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial L_Y} = (1-\alpha) L_Y^{-\alpha} D_Y^{\alpha} - w &= 0 \\ (1-\alpha) L_Y^{1-\alpha} D_Y^{\alpha} &= wL_Y \\ (1-\alpha) Y &= wL_Y \\ L_Y &= (1-\alpha)\frac{Y}{w}.\end{aligned}$$

Herleitung von Gleichung (11):
Ohne die Möglichkeit von Qualitätsverbesserungen, so dass ein Gut eventuell obsolet wird, wäre der Wert eines Patents einfach der Barwert aller künftigen Gewinne, abgezinst mit dem (sicheren) Anlagezins r. Nun kann es in diesem Modell

aber sein, dass ein Gut durch ein qualitativ höherwertiges ersetzt wird und es keine Nachfrage mehr nach ihm gibt. Ein Konkurrent macht eine Verbesserung mit der Wahrscheinlichkeit $I(t)$ pro Zeiteinheit. Diese Wahrscheinlichkeit legt somit die Dauer der Marktführerschaft fest und macht diese zu einer Zufallsvariablen. Es tritt also Unsicherheit über die künftigen Gewinne ein. Gezeigt wird, dass eine Möglichkeit, diese Unsicherheit bei der Barwertberechnung zu berücksichtigen, darin besteht, den sicheren Zins mit einem Aufschlag als Diskontierungsfaktor zu verwenden. Dieser Aufschlag entspricht der Forschungsintensität $I(t)$.
Bezeichne $p_0(t, \tau + h)$ die Wahrscheinlichkeit (aus Sicht von Zeitpunkt t), dass zwischen den Zeitpunkten t und $\tau + h$ keine Innovation (eines Konkurrenten) stattfindet. Es ist also die Wahrscheinlichkeit, dass der gegenwärtige Qualitätsführer dies auch in diesem Intervall bleibt und seine Monopolposition behält. Teilt man den Zeitraum $(t, \tau + h)$ gedanklich in zwei Intervalle $(t, \tau]$ und $(\tau, \tau + h)$, wobei h ein sehr kurzer Zeitraum sein soll, dann lässt sich diese Wahrscheinlichkeit auch schreiben als $p_0(t, \tau + h) = p_0(t, \tau)p_0(\tau, \tau + h)$. Hierbei wird unterstellt, dass Forschungstätigkeit ein „gedächtnisloser“ Prozess ist. Die erfolglose Forschung im ersten Intervall begünstigt die im zweiten Intervall nicht. Das Gelingen einer Innovation ist in beiden Intervallen unabhängig voneinander. h sei per Annahme so kurz gewählt, dass in dieser Zeitspanne maximal eine Innovation möglich ist. $I(t)dt$ ist bekanntlich die Wahrscheinlichkeit für eine Qualitätsverbesserung im kurzen Intervall dt. $p_1(\tau, \tau + h) = I(\tau) \cdot h$ ist also die Wahrscheinlichkeit für eine Innovation im Intervall h, die Gegenwahrscheinlichkeit $1 - I(\tau) \cdot h$ somit die Wahrscheinlichkeit, dass keine Innovation in diesem Zeitraum stattfindet, $p_0(\tau, \tau + h)$. Es folgt $p_0(t, \tau + h) = p_0(t, \tau)[1 - I(\tau) \cdot h]$. Umformen liefert $\frac{p_0(t,\tau+h)-p_0(t,\tau)}{h} = -p_0(t, \tau) \cdot I(\tau)$. Die linke Seite entspricht der Ableitung von p_0 nach der Zeit, also

$$\frac{dp_0(t, \tau)}{d\tau} = -p_0(t, \tau) \cdot I(\tau). \tag{47}$$

Gleichung (47) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit einer indefiniten Lösung $p_0(t, \tau) = Ae^{-\int_t^\tau I(s)ds}$. Für $\tau = t$ gilt $p_0(t, t) = Ae^0 = 1$. Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Innovation passiert, muss hier 100 Prozent betragen. Es folgt $A = 1$ und

$$p_0(t, \tau) = e^{-\int_t^\tau I(s)ds}.$$

Der (erwartete) Wert eines Patents ist nun der Barwert aller künftigen erwarteten

Gewinne, wieder abgezinst mit r,

$$P_A(t) = \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau r(s)ds} E[\pi(\tau)]\ d\tau,$$

wobei die erwarteten Gewinne in τ den Gewinnen in τ, $\pi(\tau)$, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, in τ noch Qualitätsführer zu sein, entsprechen: $E[\pi(\tau)] = \pi(\tau) \cdot p_0(t,\tau)$. Es folgt

$$P_A(t) = \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau r(s)ds} \pi(\tau) \cdot e^{-\int_t^\tau I(s)ds} d\tau = \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau [r(s)+I(s)]ds} \pi(\tau) d\tau. \qquad (48)$$

Herleitung von Gleichung (12):

$$\begin{aligned}
P_A(t) &= \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau [r(s)+I(s)]ds} \pi(\tau) d\tau \\
\dot{P}_A(t) &= -e^{-\int_t^t [r(s)+I(s)]ds} \pi(t) + \int_t^\infty e^{-\int_t^\tau [r(s)+I(s)]ds} \pi(\tau)[r(t)+I(t)] d\tau \\
\dot{P}_A(t) &= -\pi(t) + [r(t)+I(t)] \underbrace{\int_t^\infty e^{-\int_t^\tau [r(s)+I(s)]ds} \pi(\tau) d\tau}_{=P_A(t)} \\
\dot{P}_A(t) &= -\pi(t) + [r(t)+I(t)] P_A(t) \\
r(t) P_A(t) &= \pi(t) + \dot{P}_A(t) - I(t) P_A(t).
\end{aligned}$$

Herleitung von Gleichung (14):

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{P}_A}{P_A} &= r + I - \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{Y}{P_A} \\
&= r + \underbrace{\frac{L}{a} - (1-\alpha)\frac{Y}{P_A}}_{=I} - \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{Y}{P_A} \\
&= r + \frac{L}{a} - \frac{Y}{P_A} \left[(1-\alpha) + \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\right] \\
&= r + \frac{L}{a} - \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) \frac{Y}{P_A}.
\end{aligned}$$

Herleitung von Gleichung (19):

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= c(t)^{-\sigma}e^{-\rho t} \\
\dot{\mu}(t) = -\sigma c(t)^{-\sigma-1}\dot{c}e^{-\rho t} + c(t)^{-\sigma}e^{-\rho t}(-\rho) &= -r(t)\mu(t) \\
-\sigma\frac{\mu(t)}{c(t)}\dot{c} - \rho\mu(t) &= -r(t)\mu(t) \\
\hat{c}(t) = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} &= \frac{r(t)-\rho(t)}{\sigma}
\end{aligned}$$

Herleitung von Gleichung (22):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}(\hat{Y}\sigma + \rho + I - \hat{Y}) &= \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{L}{a} - I\right) \\
I\left[\frac{1}{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)} + \frac{1}{1-\alpha}\right] &= \frac{1}{(1-\alpha)}\frac{L}{a} - \frac{1}{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}[\hat{Y}(\sigma-1)+\rho] \\
I\left[\frac{1-\frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)(1-\alpha)}\right] &= \frac{1}{(1-\alpha)}\frac{L}{a} - \frac{1}{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}[\hat{Y}(\sigma-1)+\rho] \\
I &= \frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{\left(1-\frac{\alpha}{\lambda}\right)}\frac{L}{a} - \frac{(1-\alpha)}{\left(1-\frac{\alpha}{\lambda}\right)}[\hat{Y}(\sigma-1)+\rho]
\end{aligned}$$

Herleitung von Gleichung (25):

$$\begin{aligned}
D_Y &= \exp\left\{\int_0^1 \ln\left[\lambda^{\Omega(j)}x_{\Omega(j)}(j)\right]dj\right\} \\
\ln D_Y &= \int_0^1 \ln\left[\lambda^{\Omega(j)}x_{\Omega(j)}(j)\right]dj \\
&= \int_0^1 \left[\ln\lambda^{\Omega(j)} + \ln x_{\Omega(j)}(j)\right]dj \\
&= \int_0^1 \Omega(j)\ln\lambda dj + \int_0^1 \ln x_{\Omega(j)}(j)dj \\
&= \ln\lambda\int_0^1 \Omega(j)dj + \int_0^1 \ln x_{\Omega(j)}(j)dj \\
\frac{d\ln D_Y}{dt} = \hat{D}_Y &= \ln\lambda\frac{d\int_0^1\Omega(j)dj}{dt} + \frac{d\int_0^1 \ln x_{\Omega(j)}(j)dj}{dt}
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite gilt: $x_{\Omega(j)}(j) = \frac{\alpha Y}{r\lambda\eta} = x$ und somit im steady state $\hat{x} = \hat{Y}$.
$\frac{d\int_0^1 \ln x_{\Omega(j)}(j)dj}{dt}$ kann umgeformt werden zu $\frac{d\int_0^1 \ln x dj}{dt} = \frac{d \ln x}{dt} = \hat{x} = \hat{Y}$.
Für den anderen Term gilt Folgendes: $d\int_0^1 \Omega(j)dj$ ist gemäß (4) gleich Idt. Beides einsetzen liefert (25)

$$\hat{D}_Y = I \ln \lambda + \hat{Y}.$$

Beweis, dass für $\sigma > 1$ Bedingung (21) immer erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
\rho &> (1-\sigma)\hat{Y} \\
\rho &> \frac{\alpha(\sigma-1)\ln\lambda}{\left[1-\frac{\alpha}{\lambda}+\alpha(\sigma-1)\ln\lambda\right]}\left[\rho - \frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)} \cdot \frac{L}{a}\right] \\
\rho - \frac{\alpha(\sigma-1)\ln\lambda}{\left[1-\frac{\alpha}{\lambda}+\alpha(\sigma-1)\ln\lambda\right]}\rho &> -\frac{\alpha(\sigma-1)\ln\lambda\ \alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{L}{a}}{\left[1-\frac{\alpha}{\lambda}+\alpha(\sigma-1)\ln\lambda\right](1-\alpha)} \\
\rho\left[\frac{1-\frac{\alpha}{\lambda}}{\left[1-\frac{\alpha}{\lambda}+\alpha(\sigma-1)\ln\lambda\right]}\right] &> -\frac{\alpha(\sigma-1)\ln\lambda\ \alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{L}{a}}{\left[1-\frac{\alpha}{\lambda}+\alpha(\sigma-1)\ln\lambda\right](1-\alpha)} \\
\rho &> -\frac{\alpha^2(\sigma-1)\ln\lambda\ \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{L}{a}}{\left(1-\frac{\alpha}{\lambda}\right)(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

Der Zähler ist strikt positiv für $\sigma > 1$. Der Nenner ist ebenso größer als null. Damit wird der gesamte Ausdruck auf der rechten Seite negativ. Weil für ρ per Annahme nur positive Werte zulässig sind, ist Bedingung (21) für $\sigma > 1$ immer erfüllt.

Herleitung von Gleichung (32):

$$\begin{aligned}
\hat{Y} &= \frac{\alpha}{1-\alpha} I \ln\lambda \\
\hat{Y} &= \ln\lambda \frac{\alpha}{1-\alpha} \\
&\quad \cdot \left[\frac{\alpha(1-\frac{1}{\lambda})}{1-\frac{\alpha}{\lambda}} \cdot \frac{L}{a} - \frac{(1-\alpha)(\sigma-1)}{1-\frac{\alpha}{\lambda}} \cdot \hat{Y} - \frac{1-\alpha}{1-\frac{\alpha}{\lambda}} \rho \right] \\
\hat{Y} \left[1 + \frac{\alpha(\sigma-1)\ln\lambda}{1-\frac{\alpha}{\lambda}} \right] &= \ln\lambda \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\frac{\alpha(1-\frac{1}{\lambda})}{1-\frac{\alpha}{\lambda}} \frac{L}{a} - \frac{1-\alpha}{1-\frac{\alpha}{\lambda}} \rho \right] \\
\hat{Y} \cdot \frac{1-\frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma-1)\ln\lambda}{1-\frac{\alpha}{\lambda}} &= \ln\lambda \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\frac{\alpha}{\lambda})} \left[\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{L}{a} - (1-\alpha)\rho \right] \\
\hat{Y} &= \frac{\alpha \ln\lambda}{\left[1-\frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma-1)\ln\lambda\right](1-\alpha)} \\
&\quad \cdot \left[\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{L}{a} - (1-\alpha)\rho \right] \\
\hat{Y} &= \frac{\alpha \ln\lambda}{\left[1-\frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma-1)\ln\lambda\right]} \left[\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)} \frac{L}{a} - \rho \right]
\end{aligned}$$

Herleitung von Gleichung (33):

$$\begin{aligned}
\rho &> (1-\sigma)\hat{Y} \\
\rho &> \frac{(1-\sigma)\alpha\ln\lambda}{\left[1-\frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma-1)\ln\lambda\right]} \left[\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)} \frac{L}{a} - \rho \right] \\
\rho \frac{1-\frac{\alpha}{\lambda}}{\left[1-\frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma-1)\ln\lambda\right]} &> \frac{(1-\sigma)\alpha\ln\lambda}{\left[1-\frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma-1)\ln\lambda\right]} \frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)} \frac{L}{a}
\end{aligned}$$

Wenn $1-\frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma-1)\ln\lambda > 0$, dann folgt

$$\tilde{\rho} > \frac{\alpha^2(1-\sigma)\ln\lambda\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{\left(1-\frac{\alpha}{\lambda}\right)(1-\alpha)}.$$

Andernfalls – $1-\frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma-1)\ln\lambda < 0$ – gilt

$$\tilde{\rho} < \frac{\alpha^2(1-\sigma)\ln\lambda\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{\left(1-\frac{\alpha}{\lambda}\right)(1-\alpha)}.$$

$1-\frac{\alpha}{\lambda}+\alpha(\sigma-1)\ln\lambda$ größer (kleiner) 0 ist äquivalent zu σ größer (kleiner) $\bar{\sigma}$, wie eine einfache Umformung zeigt.

Herleitung der Geraden *II*:
Zunächst wird die gleichgewichtige Forschungsintensität I berechnet. Einsetzen von (32) in (26):

$$\begin{aligned} I &= \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{1}{\ln\lambda}\hat{Y} \\ &= \frac{1-\alpha}{\left[1-\frac{\alpha}{\lambda}+\alpha(\sigma-1)\ln\lambda\right]}\left[\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)}\cdot\frac{L}{a}-\rho\right]. \end{aligned}$$

Im Forschungssektor kann maximal die gesamte, zur Verfügung stehende Arbeit eingesetzt werden, also $I \leq \frac{L}{a}$. $\sigma < \bar{\sigma}$ bedeutet, dass der Nenner im Bruch der letzten Gleichung negativ ist. $I \leq \frac{L}{a}$ lässt sich Umformen zu

$$\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)-(1-\alpha)\rho\frac{a}{L} \geq 1-\frac{\alpha}{\lambda}+\alpha(\sigma-1)\ln\lambda$$

bzw.

$$\rho\frac{a}{L} \equiv \tilde{\rho} \leq \frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)-\left[1-\frac{\alpha}{\lambda}+\alpha(\sigma-1)\ln\lambda\right]}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha}(1-\sigma)\ln\lambda-1. \quad (49)$$

An der Stelle $\sigma=0$ lautet die Transversalitätsbedingung (33)

$$\tilde{\rho} < \frac{\alpha^2\ln\lambda\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{\left(1-\frac{\alpha}{\lambda}\right)(1-\alpha)}. \quad (50)$$

Diese Bedingung ist an der Stelle $\sigma=0$ stärker als die in Ungleichung (49):

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2\ln\lambda\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{\left(1-\frac{\alpha}{\lambda}\right)(1-\alpha)} &< \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\lambda-1 \\ \frac{\alpha\ln\lambda}{1-\alpha}\left[\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{1-\frac{\alpha}{\lambda}}-1\right] &< -1 \\ \alpha\ln\lambda &> 1-\frac{\alpha}{\lambda}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt, weil für $\bar{\sigma}$ nur Werte größer als null hier überhaupt in Betracht kommen. $\bar{\sigma} = (\alpha\ln\lambda-1+\alpha/\lambda)/(\alpha\ln\lambda) > 0$ impliziert

$\alpha \ln \lambda > 1-\alpha/\lambda$. Der Ordinatenabschnitt in Abbildung 5 ist somit für die Transversalitätsbedingung niedriger. Außerdem schneiden sich beide Geraden im Punkt $(\bar{\sigma}; \alpha(1-\frac{1}{\lambda})/(1-\alpha)$. Für die Transversalitätsbedingung wurde dies bereits gezeigt. Für die Gerade II an der Stelle $\bar{\sigma}$ gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho} &< \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(1-1+\frac{1-\frac{\alpha}{\lambda}}{\alpha \ln \lambda}\right)\ln \lambda - 1 \\
\tilde{\rho} &< \frac{1-\frac{\alpha}{\lambda}}{1-\alpha} - 1 = \frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Für $\sigma < \bar{\sigma} < 1$ gilt analog $\tilde{\rho} > \frac{\alpha}{1-\alpha}(1-\sigma)\ln \lambda - 1$. Weil die Steigung dieser Restriktionsgeraden steiler ist als die der Transversalitätsbedingung, ist hier direkt ersichtlich, dass die Transversalitätsbedingung stärker ist als diese Restriktion. Insgesamt ist für den gesamten Bereich $0 < \sigma < 1$ die Transversalitätsbedingung eine stärkere Restriktion als die durch die Bevölkerungsgröße auferlegte. Die Letztgenannte wird durch die Erste impliziert.

Herleitung von Gleichung (35):

Das statische Maximierungsproblem des sozialen Planers zu jedem Zeitpunkt besteht darin, das vorhandene Kapital so auf die einzelnen Produktlinien aufzuteilen (und damit die eingesetzten Mengen an Kapitalgütern festzulegen), dass der Output des Endproduktes (bzw. der Logarithmus davon) maximiert wird:

$$\begin{aligned}
\max_{x_{\Omega(j)}(j)} \ln Y = (1-\alpha)\ln L_Y + \alpha \int_0^1 \left[\lambda^{\Omega(j)} x_{\Omega(j)}(j)\right] dj \\
\text{s.t.} \int_0^1 K(j)dj = \int_0^1 \eta x_{\Omega(j)}(j) = K.
\end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion lautet

$$\mathcal{L} = (1-\alpha)\ln L_Y + \alpha \int_0^1 \left[\lambda^{\Omega(j)} x_{\Omega(j)}(j)\right] dj - \phi\left[\int_0^1 \eta x_{\Omega(j)}(j) - K\right].$$

Aus den Optimalitätsbedingung ($\partial \mathcal{L}/\partial x_{\Omega(j)}(j) = 0$) für zwei beliebige Güter j und j' folgt $x_{\Omega(j)}(j) = \alpha/(\phi\eta) = x_{\Omega(j')}(j')$. Die eingesetzte Menge eines Gutes ist also für alle Güter gleich, $x(j) = x$.

Der Kapitalstock in der Ökonomie ergibt sich dann als $K \equiv \int_0^1 K(j)dj = \int_0^1 \eta x_{\Omega(j)}(j)dj = \eta x$.

Umformen der Produktionsfunktion liefert [52]

$$\begin{aligned}
Y &= L_Y^{1-\alpha}\left(\exp\left\{\int_0^1 \ln\left[\lambda^{\Omega(j)} x_{\Omega(j)}(j)\right] dj\right\}\right)^{\alpha} \\
&= L_Y^{1-\alpha}\left(\exp\left\{\int_0^1 \ln \lambda^{\Omega(j)} dj + \int_0^1 \ln x_{\Omega(j)}(j) dj\right\}\right)^{\alpha} \\
&= L_Y^{1-\alpha}\left(\exp\left\{\int_0^1 \Omega(j) \ln \lambda dj + \int_0^1 \ln x dj\right\}\right)^{\alpha} \\
&= L_Y^{1-\alpha} x^{\alpha}\left(\exp\left\{\ln \lambda \int_0^1 \Omega(j) dj\right\}\right)^{\alpha} \\
&= L_Y^{1-\alpha}\left(\frac{K}{\eta}\right)^{\alpha}\left(\underbrace{\exp\left\{\ln \lambda \int_0^1 \Omega(j) dj\right\}}_{\equiv \Delta}\right)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Einsetzen von $(L - aI)$ für L_Y ergibt schließlich

$$Y = (L - aI)^{1-\alpha}\left(\frac{K}{\eta}\right)^{\alpha} \Delta^{\alpha}.$$

Herleitung von Gleichung (44):

$$\begin{aligned}
\hat{Y}\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha} - \sigma\right) &= \rho - \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \cdot \frac{\alpha Y}{\Delta} - I \ln \lambda \\
\hat{Y}\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha} - \sigma\right) &= \rho - \frac{(L - aI)\Delta \ln \lambda}{a(1-\alpha)Y} \cdot \frac{\alpha Y}{\Delta} - I \ln \lambda \\
\hat{Y}\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha} - \sigma\right) &= \rho - \frac{\alpha L \ln \lambda}{a(1-\alpha)} + I \ln \lambda\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} - 1\right) \\
\hat{Y}\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha} - \sigma\right) &= \rho - \frac{\alpha L \ln \lambda}{a(1-\alpha)} + \frac{(1-\alpha)\hat{Y}}{\alpha \ln \lambda} \ln \lambda \frac{2\alpha-1}{1-\alpha} \\
\hat{Y}\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha} - \sigma - \frac{2\alpha-1}{\alpha}\right) &= \rho - \frac{\alpha L \ln \lambda}{a(1-\alpha)} \\
\hat{Y}^* &= \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\alpha \ln \lambda}{1-\alpha} \cdot \frac{L}{a} - \rho\right)
\end{aligned}$$

[52] Es werden - wie gezeigt - nur die höchsten Qualitäten produziert.

Herleitung von Gleichung (45):
Einsetzen von (34) und (44) in $\hat{Y}^* > \hat{Y}$ ergibt:

$$\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\alpha \ln \lambda}{1-\alpha}\frac{L}{a} - \rho\right) > \frac{1}{\sigma - \bar{\sigma}}\left[\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)}\frac{L}{a} - \rho\right]$$

Multiplizieren auf beiden Seiten mit σ und a/L ergibt (45).

Herleitung von Gleichung (46):

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha \ln \lambda}{1-\alpha} - \tilde{\rho} &> \frac{1}{1-\bar{\sigma}}\left[\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{1-\alpha} - \tilde{\rho}\right] \\
\frac{\alpha \ln \lambda}{1-\alpha} - \tilde{\rho} &> \frac{\alpha \ln \lambda}{1-\frac{\alpha}{\lambda}}\left[\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{1-\alpha} - \tilde{\rho}\right] \\
\frac{\alpha \ln \lambda}{1-\alpha}\left[1 - \frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{1-\frac{\alpha}{\lambda}}\right] &> \tilde{\rho}\left(1 - \frac{\alpha \ln \lambda}{1-\frac{\alpha}{\lambda}}\right)
\end{aligned}$$

Mit $\alpha \ln \lambda/(1-\alpha/\lambda) = 1/(1-\bar{\sigma})$ folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha \ln \lambda}{1-\alpha}\,\frac{1-\alpha}{1-\frac{\alpha}{\lambda}} &> \tilde{\rho}\,\frac{-\bar{\sigma}}{1-\bar{\sigma}} \\
\frac{1}{1-\bar{\sigma}} &> \tilde{\rho}\,\frac{-\bar{\sigma}}{1-\bar{\sigma}}.
\end{aligned}$$

Berechnung von $\sigma_{|\hat{Y}=\hat{Y}^*}$:

$$\begin{aligned}
\hat{Y}^* &= \hat{Y} \\
\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\alpha \ln \lambda}{1-\alpha}\frac{L}{a} - \rho\right) &= \frac{\alpha \ln \lambda}{\left[1-\frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma-1)\ln \lambda\right]} \cdot \\
&\quad \cdot \left[\frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{(1-\alpha)}\frac{L}{a} - \rho\right] \\
\frac{\alpha \ln \lambda}{(1-\alpha)}\frac{L}{a}\left[1 - \frac{\alpha\sigma\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{1-\frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma-1)\ln \lambda}\right] &= \rho\left[1 - \frac{\alpha\sigma \ln \lambda}{1-\frac{\alpha}{\lambda} + \alpha(\sigma-1)\ln \lambda}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha \ln \lambda}{(1-\alpha)} \frac{L}{a} & \\
\cdot \left[1 - \frac{\alpha}{\lambda} + \alpha\sigma \left(\ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda}\right) - \alpha \ln \lambda\right] &= \rho \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda\right) \\
\alpha\sigma \left(\ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda}\right) &= \left(\rho \frac{a}{L} \frac{1-\alpha}{\alpha \ln \lambda} - 1\right) \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda\right) \\
\sigma_{|\hat{Y}=\hat{Y}^*} &= \left(\tilde{\rho} \frac{1-\alpha}{\alpha \ln \lambda} - 1\right) \frac{1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda}{\alpha \left(\ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda}\right)}.
\end{aligned}
$$

Berechnung von $\tilde{\rho}(\sigma')$:
Einsetzen von σ' in die Transversalitätsbedingung (33):

$$
\begin{aligned}
\tilde{\rho} &< \frac{\alpha^2 (1-\sigma') \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \ln \lambda}{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)(1-\alpha)} \\
&= \frac{\alpha^2 \left[1 - \left(\tilde{\rho} \frac{1-\alpha}{\alpha \ln \lambda} - 1\right) \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda\right)}{\alpha\left(\ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda}\right)}\right]}{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)(1-\alpha)} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \ln \lambda \\
&= \frac{\alpha \left[\frac{1 - \alpha - \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda\right) \tilde{\rho} \frac{1-\alpha}{\alpha \ln \lambda}}{\ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda}}\right] \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \ln \lambda}{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)(1-\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Weil $\ln \lambda > 1 - 1/\lambda$ (siehe Abbildung 8) gilt, folgt:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\rho} \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)(1-\alpha) \left(\ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda}\right) &< \alpha \left[1 - \alpha - \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda\right) \tilde{\rho} \frac{1-\alpha}{\alpha \ln \lambda}\right] \\
\tilde{\rho} \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)(1-\alpha) \left(\ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda}\right) &< \alpha(1-\alpha) \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda} - \alpha \ln \lambda\right) \frac{\tilde{\rho}}{\alpha \ln \lambda}\right] \\
&\quad \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \ln \lambda
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\rho}\left(1-\frac{\alpha}{\lambda}\right)\left(\ln\lambda-1+\frac{1}{\lambda}\right)+\tilde{\rho}\left(1-\frac{\alpha}{\lambda}-\alpha\ln\lambda\right)\left(1-\frac{1}{\lambda}\right) &< \alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\ln\lambda \\
\tilde{\rho}\left[\left(1-\frac{\alpha}{\lambda}\right)\left(\ln\lambda-1+\frac{1}{\lambda}\right)+\left(1-\frac{\alpha}{\lambda}-\alpha\ln\lambda\right)\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right] &< \alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\ln\lambda \\
\tilde{\rho}(1-\alpha)\ln\lambda &< \alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\ln\lambda \\
\tilde{\rho} &< \frac{\alpha\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Anmerkungen zur Produktionsfunktion von Y:

1. Beweis, dass im Endproduktsektor konstante Skalenerträge vorliegen:

$$
Y=L_Y^{1-\alpha}\left(\exp\left\{\int_0^1\ln\left[\sum_{\omega=1}^{\Omega(j)}\lambda^{\omega}x_{\omega}(j)\right]dj\right\}\right)^{\alpha}.
$$

Multiplikation sämtlicher Inputs mit dem Faktor θ:

$$
\begin{aligned}
&(\theta L_Y)^{1-\alpha}\left(\exp\left\{\int_0^1\ln\left[\sum_{\omega=1}^{\Omega(j)}\theta\lambda^{\omega}x_{\omega}(j)\right]dj\right\}\right)^{\alpha} \\
=\ &\theta^{1-\alpha}L_Y^{1-\alpha}\left(\exp\left\{\int_0^1\ln\theta\ dj+\int_0^1\ln\left[\sum_{\omega=1}^{\Omega(j)}\lambda^{\omega}x_{\omega}(j)\right]dj\right\}\right)^{\alpha} \\
=\ &\theta^{1-\alpha}L_Y^{1-\alpha}\left(\exp\left\{\int_0^1\ln\theta\ dj\right\}\right)^{\alpha}\left(\exp\left\{\int_0^1\ln\left[\sum_{\omega=1}^{\Omega(j)}\lambda^{\omega}x_{\omega}(j)\right]dj\right\}\right)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta^{1-\alpha}L_Y^{1-\alpha}\left(\exp\left\{\ln\theta\ \right\}\right)^{\alpha}\left(\exp\left\{\int_0^1\ln\left[\sum_{\omega=1}^{\Omega(j)}\lambda^{\omega}x_{\omega}(j)\right]dj\right\}\right)^{\alpha} \\
&= \theta L_Y^{1-\alpha}\left(\exp\left\{\int_0^1\ln\left[\sum_{\omega=1}^{\Omega(j)}\lambda^{\omega}x_{\omega}(j)\right]dj\right\}\right)^{\alpha} \\
&= \theta Y
\end{aligned}
$$

2. Zur Substitutionselastizität zwischen Kapitalgütern aus dem gleichen Sektor. Untersucht wird die Substituierbarkeit zwischen der höchsten ($\Omega(j)$) und der darauf folgenden Qualität ($\Omega_{-1}(j)$) eines Sektors. Gewinnmaximierung verlangt: $\max p_Y Y \quad \text{s.t.} \quad \int_0^1 \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} p_\omega(j) x_\omega(j) dj = B$. Aufstellen der Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L} = L_Y^{1-\alpha} \left(\exp \left\{ \int_0^1 \ln \left[\sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^\omega x_\omega(j) \right] dj \right\} \right)^\alpha + \epsilon \left[\int_0^1 \sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} p_\omega(j) x_\omega(j) dj - B \right]$$

Ableiten nach $x_{\Omega(j)}(j)$ und nach $x_{\Omega_{-1}(j)}(j)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\Omega(j)}(j)} = L_Y^{1-\alpha} D_Y^\alpha \frac{\lambda^{\Omega(j)}}{\sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^\omega x_\omega(j)} + \epsilon p_{\Omega(j)}(j) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\Omega_{-1}(j)}(j)} = L_Y^{1-\alpha} D_Y^\alpha \frac{\lambda^{\Omega_{-1}(j)}}{\sum_{\omega=1}^{\Omega(j)} \lambda^\omega x_\omega(j)} + \epsilon p_{\Omega_{-1}(j)}(j) = 0.$$

Aus diesen beiden Bedingungen folgt:

$$p_{\Omega(j)}(j) = \lambda p_{\Omega_{-1}(j)}(j).$$

Wenn also die Preise dieser Relation entsprechen, dann werden beide Güter in gleicher Menge eingesetzt. Bleibt der Preis des besten Gutes marginal darunter, dann wird vom direkten Nachfolger nichts mehr in der Produktion von Y eingesetzt. Die Substitutionselastizität ist also unendlich groß. Die im Modell gemachte Annahme, dass die Hersteller des Endproduktes bei Gültigkeit obiger Gleichung immer die bessere Qualität wählen, ist also gerechtfertigt.

3. Zur Substitutionselastizität zwischen Kapitalgütern aus verschiedenen Sektoren.
Wie oben gezeigt wird immer nur die höchste Qualität einer Produktlinie im Endproduktsektor verwendet. Die Produktionsfunktion lässt sich dann schreiben als $Y = L_Y^{1-\alpha} \left(\exp \left\{ \ln \lambda \int_0^1 \Omega(j) dj + \int_0^1 \ln x_{\Omega(j)}(j) dj \right\} \right)^\alpha$. Die Lagrange-Funktion lautet

$$\mathcal{L} = L_Y^{1-\alpha} \Bigg(\underbrace{\exp \left\{ \ln \lambda \int_0^1 \Omega(j) dj + \int_0^1 \ln x_{\Omega(j)}(j) dj \right\}}_{\equiv D_Y^*} \Bigg)^\alpha + \epsilon \left[\int_0^1 p_{\Omega(j)}(j) x_\Omega(j) dj - B \right]$$

Ableiten nach $x_{\Omega(j)}(j)$ und nach $x_{\Omega(j')}(j')$ ergibt:[53]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x(j)} = L_Y^{1-\alpha} \; D_Y^{*\;\alpha} \, \frac{1}{x(j)} + \epsilon p(j) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x(j')} = L_Y^{1-\alpha} \; D_Y^{*\;\alpha} \, \frac{1}{x(j')} + \epsilon p(j') = 0.$$

Daraus folgt $\frac{x(j)}{x(j')} = \frac{p(j')}{p(j)}$ und eine Substitutionselastizität

$$\frac{\partial \left(\frac{x(j)}{x(j')}\right)}{\partial \left(\frac{p(j)}{p(j')}\right)} \frac{\frac{p(j)}{p(j')}}{\frac{x(j)}{x(j')}} = (-1) \left(\frac{p(j)}{p(j')}\right)^{-2} \frac{\frac{p(j)}{p(j')}}{\left(\frac{p(j)}{p(j')}\right)^{-1}} = -1.$$

[53] Zur besseren Übersichtlichkeit der Darstellung kürze ich im Folgenden die Schreibweise: mit $x(j)$ ist $x_{\Omega(j)}(j)$ und mit $p(j)$ ist $p_{\Omega(j)}(j)$, also immer die Menge und der Preis der höchsten Qualität, gemeint.